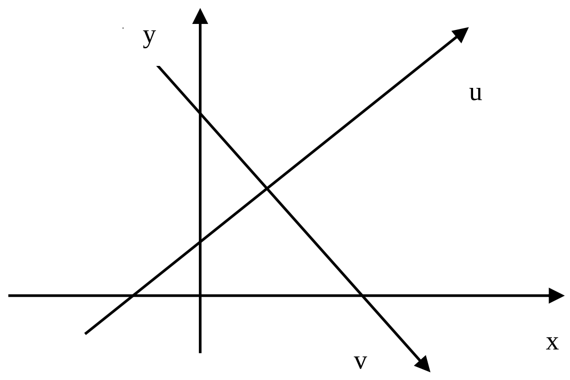
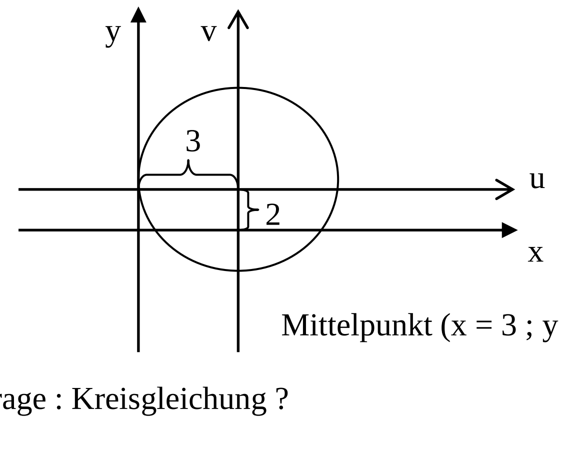
9. Geometrie und Analysis

9.1. Koordinatentransformation in kartesische Koordinaten



- Translation (Verschiebung)
- Rotation (Drehung)

Bsp.:
Die explizite Notation einer Funktion in Form einer Funktionsgleichung hängt wesentlich von der "geschickten" Wahl des Koordinatensystems ab.



Mittelpunkt (x = 3 ; y = 2)

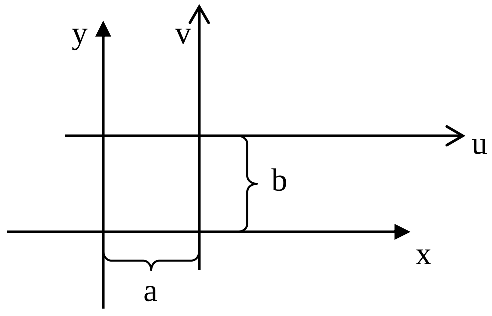
Frage : Kreisgleichung ?

Wählt man ein Koordinatensystem mit dem Ursprung im Kreismittelpunkt, so vereinfacht sich die Gleichung in : $u^2 + v^2 = 3^2$ (*)

Beziehung zwischen
u und x $x = 3 \Rightarrow u = 0$, d.h. $u = x - 3$
v und y $y = 2 \Rightarrow v = 0$, d.h. $v = y - 2$

Einsetzen $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 3^2$

<u>Translation (Parallelverschiebung)</u>



$x = a + u \Leftrightarrow u = x - a$
$y = b + v \Leftrightarrow v = y - b$

Im obigen Beispiel des Kreises ist b = 2 und a = 3.

<u>Bsp.:</u>
Parabel

$$y = x^2 + 4x + 1$$
$$\text{Scheitel} : y' = 2x + 4$$
$$y' = 0 \Rightarrow 0 = 2x + 4 \Leftrightarrow -4 = 2x \Leftrightarrow -2 = x$$
$$x_S = -2 \qquad y_S = 4 - 8 + 1 = -3$$

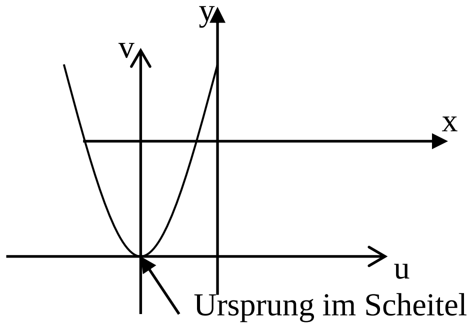
Frage : Parabelgleichung dieser Parabel mit Scheitel im Ursprung ?

Allg. Form : $y = ax^2$
Scheitel im Ursprung ?

$$y' = 2ax \qquad 0 = 2ax$$
$$\Rightarrow x_S = 0 \qquad y_S = a \cdot 0^2 = 0$$

Lösung: Scheitel in Ursprung verschieben (Translation, d.h. x und y verschieben).
Quadratische Ergänzung :

$$y = (x+2)^2 + C$$
$$= x^2 + 4x + 4 + C \Rightarrow \mathrm{C} = -3 \quad \text{da } 4 + \mathrm{C} = 1$$
Somit
$$y = (x+2)^2 - 3$$
$$\Leftrightarrow y + 3 = (x+2)^2$$



Formal:

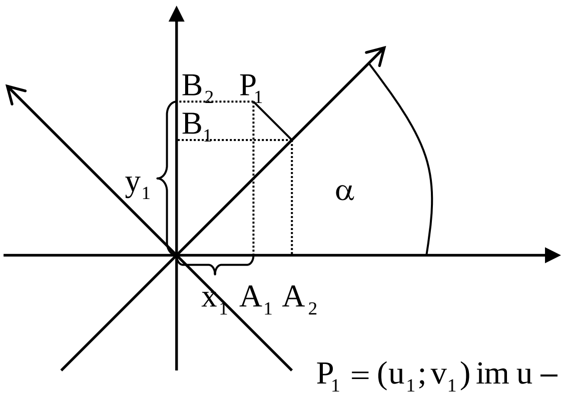
$v^2 = 1 \cdot u^2$ Scheitel (-2 / - 3)

$u = x - (-2)$ $v = y - (-3)$

$u = (x + 2)$ $v = y + 3$

Einsetzen $(y + 3) = (x + 2)^2$

Rotation (Koordinatendrehung)



$P_1 = (u_1; v_1)$ im u – v – System

$P_1 = (x_1; y_1)$ im x – y – System

Drehung erfolgt um den Winkel α (nach links)
u-v-System und x-y-System haben denselben Ursprung.

$x_1 = \overline{0A_1} = \overline{0A_2} - \overline{A_1A_2}$ (*)

mit $\cos\alpha = \dfrac{\overline{0A_2}}{u_1} \Leftrightarrow \overline{0A_2} = u_1 \cdot \cos\alpha$ und $\sin\alpha = \dfrac{\overline{A_1A_2}}{v_1} \Leftrightarrow \overline{A_1A_2} = v_1 \cdot \sin\alpha$

*fo*lg*t* einsetzen in (*) :

$x_1 = u_1 \cdot \cos\alpha - v_1 \cdot \sin\alpha$

<u>*ana* log :</u>

$y_1 = \overline{0B_1} + \overline{B_1B_2}$

mit $\sin\alpha = \dfrac{\overline{0B_1}}{u_1} \Leftrightarrow \overline{0B_1} = u_1 \cdot \sin\alpha$ und $\cos\alpha = \dfrac{\overline{B_1B_2}}{v_1} \Leftrightarrow \overline{B_1B_2} = v_1 \cdot \cos\alpha$

*fo*lg*t* :

$y_1 = u_1 \cdot \sin\alpha + v_1 \cdot \cos\alpha$

Somit erhalten wir :
Bei einer Drehung um den Winkel α (nach links) des x-y-Systems erhalten wir das u-v-System wobei für x und y gilt :

$$x = u \cdot \cos\alpha - v \cdot \sin\alpha$$
$$y = u \cdot \sin\alpha + v \cdot \cos\alpha$$

Durch entgegengesetzte Drehung (d.h. um $-\alpha$) erhalten wir mit
$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ und $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$.

$$u = x\cdot\cos(-\alpha) - y\cdot\sin(-\alpha) = x\cdot\cos\alpha + y\cdot\sin\alpha = u$$
$$v = x\cdot\sin(-\alpha) + y\cdot\cos(-\alpha) = -x\cdot\sin\alpha + y\cdot\cos\alpha = v$$

<u>Notation in Vektorform:</u>

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

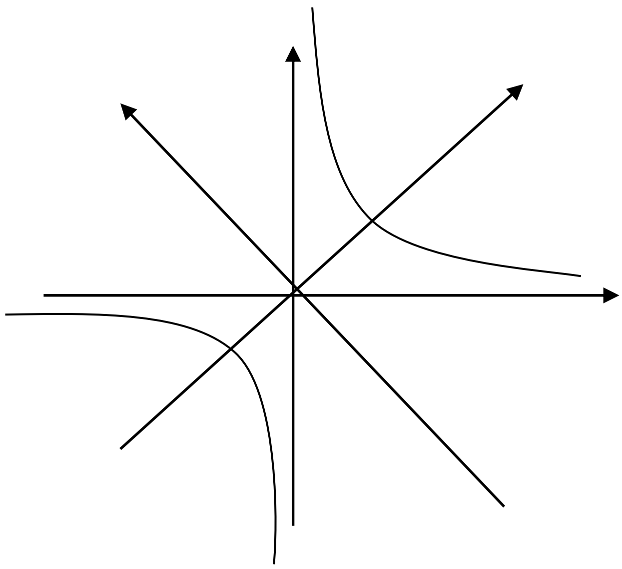
d.h. u ist Skalarprodukt des Zeilenvektors $(\cos\alpha \quad \sin\alpha)$ mit dem Spaltenvektor $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

<u>**Bsp.:**</u>

(1.) Multiplikation eines Vektors mit einer Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ +1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(2.) Welche Funktionsgleichung hat die Funktion f(x)=1/x in einem Um $\alpha = 45°$ gedrehten Koordinatensystem?



$$y = \frac{1}{x} \Leftrightarrow y \cdot x = 1 \qquad (*)$$

$$\cos 45° = \sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x = \frac{u}{\sqrt{2}} - \frac{v}{\sqrt{2}} \qquad y = \frac{u}{\sqrt{2}} + \frac{v}{\sqrt{2}}$$

Einsetzen in (*):

$$1 = x \cdot y = \left(\frac{u}{\sqrt{2}} - \frac{v}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left(\frac{u}{\sqrt{2}} + \frac{v}{\sqrt{2}}\right) = \frac{u^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2} - \frac{v^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2}$$

Somit:

$$\frac{u^2}{2} - \frac{v^2}{2} = 1 \qquad \text{Hyperbelgleichnung}$$

$\Rightarrow$ Auflösen nach u:

$$u^2 - v^2 = 2 \Leftrightarrow u^2 = 2 - v^2$$

$$u = \pm\sqrt{2 - v^2} \qquad \text{2 Werte (+ und -) für jeden Wert von v}$$

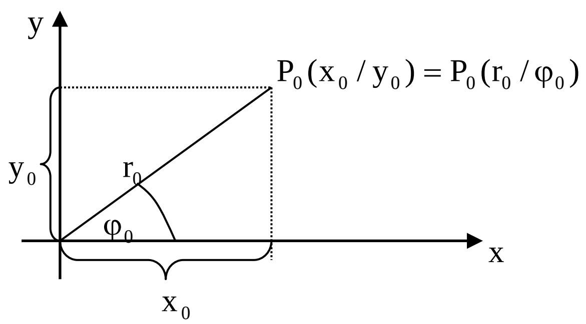
$\rightarrow$ keine Funktion.

Aber: 1. Funktion $u = +\sqrt{2 - v^2}$

2. Funktion $u = -\sqrt{2 - v^2}$

9.2. Polarkoordinaten

Beschreibung eines Punktes der x-y-Ebene statt durch die kartesischen Koordinaten x und y durch den Abstand r vom Ursprung und durch den Winkel φ mit der x-Achse.



Die Polarkoordinaten (r ; φ) eines Punktes bestehen aus einer Abstandskoordinate r und einer Winkelkoordinate φ.

Koordinatentransformation :
Kartesiche Koordinaten → Polarkoordinaten.

$$(r\,;\varphi) \rightarrow (x\,,y): x = r\cdot\cos\varphi$$
$$y = r\cdot\sin\varphi$$

$$(x\,,y) \rightarrow (r\,;\varphi):$$
$$\frac{\tan\varphi}{1} = \frac{y}{x} \Rightarrow \tan\varphi = \frac{y}{x}$$

$$\arctan z \quad \text{für } z \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\varphi = \begin{cases} \arctan\frac{y}{x} & \text{für } x > 0 \\ \pi + \arctan\frac{y}{x} & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

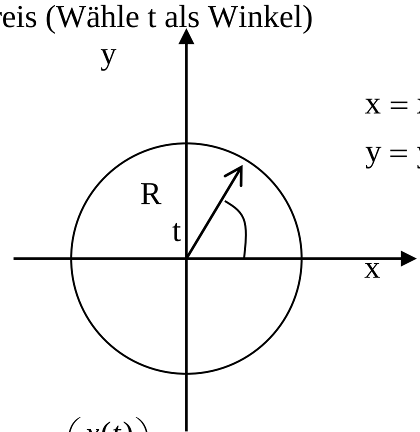
Bsp.: Darstellung der Kreisgleichung in Polarkoordinaten $r = R$

9.3. Parameterform von Kurven

9.3.1. Definition

Darstellung von Kurven, durch Beschreibung der Variablen x und y (im 3-dimensionalen Fall z) aus Funktion x(t) und y(t) der Variablen t.

Bsp.:
(1.) Kreis (Wähle t als Winkel)



$$x = x(t) = R\cdot\cos t$$
$$y = y(t) = R\cdot\sin t$$

$\vec{P}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ ist bei gegebenem t der Ortsvktor des entsprechenden Punktes.

(2.) Ellipse :

$$x(t) = a \cdot \cos t$$
$$y(t) = b \cdot \sin t$$

(3.) Hyperbel

$$x(t) = \pm a \cdot \cosh t$$
$$y(t) = \pm b \cdot \sinh t$$
$$\frac{(x(t))^2}{a^2} - \frac{(y(t))^2}{b^2} = (\cosh t)^2 - (\sinh t)^2 = 1$$

Anm.: Aus obigem Zusammenhang entstand der Name hyperbolische Funktionen.

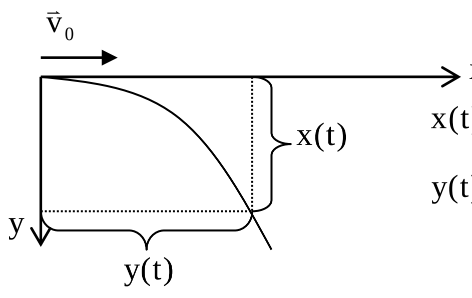
Allg. Anm.:
Die durch die Parameterform gegebene Menge (Ortsvektoren) im x-y-Koordinatensystem (bzw. 3-dim) wird als Kurve bezeichnet. Diese Kurve ist in vielen Fällen keine Funktion.

Die Beschreibung eines Sachverhaltes (Kurve) in Parameterform wird dann gewählt, wenn der Sachverhalt durch die veränderlichen Parameter definiert ist.

Bsp.: Waagerechter Wurf
Ein Körper wird aus der Höhe h mit der Geschwindigkeit V_0 abgeworfen.
Frage: Wie lautet die Flugbahn des Körpers ?
Veränderliche Parameter : Zeit t
$\rightarrow$ Beschreibung durch x(t) und y(t)

Physikalische Randbedingung :
- Wirkende Kraft : Erdanziehung
- Luftwiderstand = 0 wird angenommen.

Dann :



$$x(t) = v_0 \cdot t$$
$$y(t) = \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

d.h. zu jedem Zeitpunkt t kann der Ortsvektor des Körpers als

$$\vec{P}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

angegeben werden.

Darstellung in x-y-Form (Elimination von t)

$$x = v_0 t \Leftrightarrow t = \frac{x}{v_0} \qquad (\text{falls } v_0 \neq 0)$$

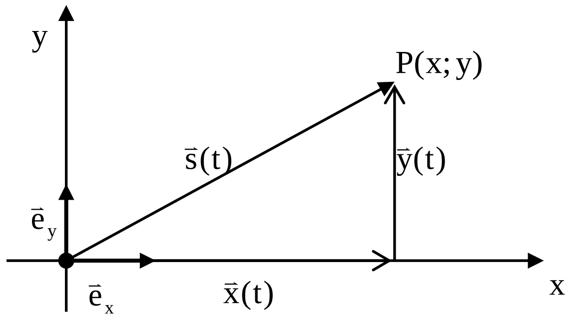
Einsetzen in $y = \frac{1}{2} g \cdot t^2 = \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2} = \frac{g}{2{v_0}^2} \cdot x^2$

Somit : $y = \left(\frac{g}{2{v_0}^2} \right) \cdot x^2$ Parabelgleichung (für $v_0 \neq 0$)

Anm.: In technischen und physikalischen Anwendungen hat die Hilfsvariable t oft die Bedeutung der Zeit bzw. des Winkels.

Darstellung einer Kurve in Vektorform

Kurve gegeben durch : $x = x(t)$
$y = y(t)$



$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \vec{x}(t) + \vec{y}(t) = x(t) \cdot \vec{e}_x + y(t) \cdot \vec{e}_y$$

9.3.2. Differentiation einer Kurve in Parameterform

Gegeben sei eine Kurve in Parameterform x = x(t) und y = y(t).
Interpretiere Hilfsvariable t als Zeit.
Dann : Ort zum Zeitpunkt t

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \vec{x}(t) + \vec{y}(t)$$

1. Ableitung :

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} \frac{dx(t)}{dt} \\ \frac{dy(t)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \dot{\vec{x}}(t) + \dot{\vec{y}}(t)$$

$$\vec{v}(t) = \dot{x}(t) \cdot \vec{e}_x + \dot{y}(t) \cdot \vec{e}_y$$

2. Ableitung :

$$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \end{pmatrix} = \ddot{x}(t) \cdot \vec{e}_x + \ddot{y}(t) \cdot \vec{e}_y$$

Zusammenfassung
Die Differentiation einer Kurve x = x(t) und y = y(t) in Parameterform erfolgt durch Differentiation der Funktion x(t) und y(t) nach der Variablen t.

Bsp.:

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} r \cdot \cos t \\ r \cdot \sin t \end{pmatrix} \hat{=} \text{gleichmäßige Kreisbewegung}$$

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} r \cdot (-\sin t) \\ r \cdot \cos t \end{pmatrix} \hat{=} \text{Geschwindigkeitsvektor zu jedem Zeitpunkt } t$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{r^2(-\sin t)^2 + r^2 \cos^2 t} = \sqrt{r^2(\sin^2 t + \cos^2 t)} = \sqrt{r^2} = r$$