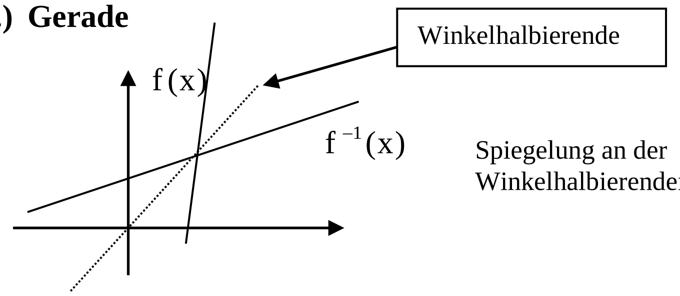
8. Ergänzungen zur Differentialrechnung

8.1. Ableitung der Umkehrfunktion

Gegeben : bel. umkehrbare Funktion f(x) sowie f´(x)
Gesucht : Ableitung der Umkehrfunktion.

Bsp.:

(1.) Gerade



Spiegelung an der Winkelhalbierenden

$$\text{Steigung } f(x) : f'(x) = \frac{a}{b}$$

$$\text{Steigung } f^{-1}(x) : \left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{b}{a} = \frac{1}{\frac{a}{b}}$$

Gerade : Sonderfall da Steigung konstant (unabhängig von x !)

(2.) Parabel y = x² = f(x)

Bestimmung der Umkehrfunktion :
Betrachte f(x) = x² für $x \in [0,\infty)$

Einschränkung des Definitionsbereichs notwendig, da f^{-1} nur existiert falls es zu jeden y genau ein x gibt (f(x) muß eineindeutig sein)

$f'(x) = 2x$

$f^{-1}(x) = ?$ $y = x^2$

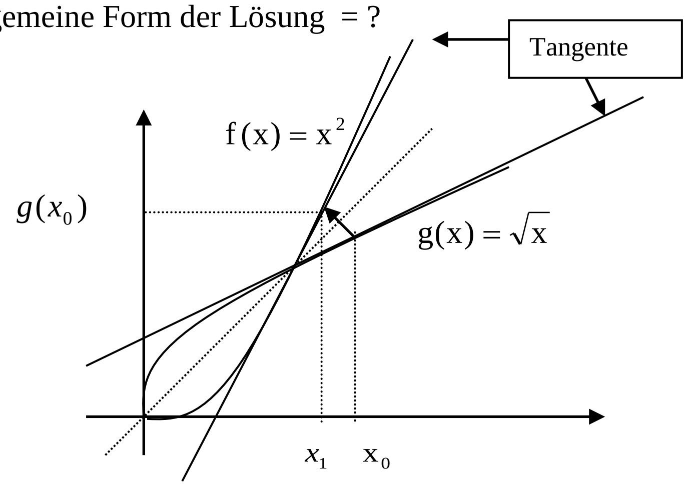
1. Auflösen nach x : $x = \sqrt{y}$

2.Vertauschen von x und y: $y = \sqrt{x}$

d.h. $f^{-1}(x) = \sqrt{x} = g(x)1$

$$g'(x) = \left((x)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Allgemeine Form der Lösung = ?



Sei x_0 bel. Stelle :

$$g'(x_0) = \frac{1}{f'(x_1)} \qquad x_1 = ? \quad x_1 = g(x_0)$$

$$\Rightarrow g'(x_0) = \frac{1}{f'(g(x_0))}$$

<u>Parabel :</u>

$$f(x) = x^2 \qquad f'(x) = 2x$$

$$g(x) = \sqrt{x} \qquad g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{f'(\sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

<u>Formal :</u> $y = f(x)$ (*)

1. Auflösen nach x $x = g(y)$ (**)
Einsetzen in (*) $y = f(g(y))$
Ableitung :

$$\frac{dy}{dy} = \frac{d\left(f(g(y))\right)}{dy} = \frac{d\left(f(g(y))\right)}{d(g(y))} \cdot \frac{d\,g(y)}{dy}$$

$$\Rightarrow 1 = f'(x) \cdot g'(y)$$

$$\Rightarrow g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

2. Vertauschen der Varaiblen x und y ergibt mit y = g(x):

$$g'(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{f'(g(x))}$$

Bsp.:

(1.) Ableiten von ln x

$y = f(x) = e^x \qquad f'(x) = e^x$

Umkehrfunktion:

1.*Auflösen* nach x: $x = \ln y = g(y)$

$$g'(y) = (\ln y)' = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{e^x} \qquad \text{mit} \quad x = g(y) = \ln y$$

$$\text{folgt} \quad g'(y) = \frac{1}{e^{\ln y}} = \frac{1}{y}$$

2.Vertauschen der Variablen

$$g'(x) = \frac{1}{x}$$

(2.) Ableiten von arctan(x)

$y = f(x) = \tan x$

$$f'(x) = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= 1 + \tan^2 x$$

Ableitung der Umkehrfunktion: $\quad y = g(x) = \arctan x$

$$g'(y) = (\arctan y)' = \frac{1}{1+\tan^2 x} \qquad \text{mit} \quad x = \arctan y$$

$$\text{folgt} \quad g'(y) = \frac{1}{1+(\tan(\arctan y))^2} = \frac{1}{1+y^2}$$

Vertauschen von x und y liefert $g'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

8.2. Implizite Differentiation

Bestimmung der Ableitung einer Funktion, die in der impliziten Form F(x,y) = 0 gegeben ist.

Bsp.:

$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$

Falls möglich, überführen in explizite Form

Auflösen nach y: $y = \sqrt{1-x^2} \quad$ (Kreisgleichung) $\quad -1 \le x \le 1$

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \left((1-x^2)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x)$$

$$= \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Falls F(x,y) nicht oder nur mit großem Aufwand nach y aufgelöst werden kann, dann gliedweise Differentiation der impliziten Funktionsgleichung :

$$\frac{d}{dx}F(x;y)=\frac{d}{dx}(x^2+y^2-1)=\frac{d}{dx}x^2+\frac{d}{dx}y^2-\frac{d}{dx}1$$

$$=2x+\frac{dy^2}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}-0=2x+2y\cdot y'=0$$

$$\Rightarrow x+y\cdot y'=0\Leftrightarrow y'(x)=\frac{-x}{y(x)}$$

<u>Zusammenfassung : Implizite Differentiation</u>

Die Steigung einer in der impliziten Form F(x;y) = 0 gegebenen Funktion in einem bel. Punkt P läßt sich wie folgt bestimmen :

1. Gliedweise Differentiation von F(x;y) = 0 nach x.
   Jeder Term der y = y(x) enthält ist nach der Kettenregel zu differenzieren.
2. Auflösen der differenzierten Funktionsgleichung nach :

   $$y'=\frac{dy}{dx}$$

   Mit dieser Gleichung kann dann für ausgewählte Werte von x Die Steigung bestimmt werden.

<u>Bsp.: Implizite Differentiation</u>

$F(x;y)=x^2-y^3=0$ Gesucht Steigung für x = 2

$$\frac{dF(x;y)}{dx}=\frac{dx^2}{dx}-\frac{dy^3}{dx}$$

$$0=2x-\frac{dy^3}{dx}\cdot\frac{dy}{dx}=2x-3y^2\cdot y'\Rightarrow y'=\frac{2x}{3y^2}$$

$x=2:$ $\quad 2^2-y^3=0\Rightarrow y^3=4 \quad y=\sqrt[3]{4}$

$$\Rightarrow y'(2)=\frac{2\cdot 2}{3\cdot\left(\sqrt[3]{4}\right)^2}=\frac{4}{3\cdot\left(4^{\frac{1}{3}}\right)^2}=\frac{4}{3\cdot 4^{\frac{2}{3}}}$$

8.3. Ableitung spezieller Funktionen

8.3.1. Herleitung der Ableitung von e^x und ln x

Darstellung der Eulerschen Zahl durch eine Folge an :

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$n=2: \quad \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = 2{,}25$$

$$n=10: \quad \left(1+\frac{1}{10}\right)^{10} = 2{,}59374$$

$$n=1000: \left(1+\frac{1}{1000}\right)^{1000} = 2{,}71692$$

Ableitung von ln x

$$\textit{Steigungsdreieck}: \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\ln(x+\Delta x)-\ln x}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\cdot \ln\frac{x+\Delta x}{x}$$

$$= \frac{1}{\Delta x}\cdot \ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{1}{x}\cdot\frac{x}{\Delta x}\cdot \ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$$

mit $\mathrm{p} = \dfrac{\mathrm{x}}{\Delta \mathrm{x}}$

$$\Rightarrow \qquad = \frac{1}{x}\cdot p\cdot \ln\left(1+\frac{1}{p}\right) = \frac{1}{x}\cdot \ln\left(1+\frac{1}{p}\right)^p$$

da $\mathrm{a} * \ln \mathrm{b} = \ln \mathrm{a}^{\mathrm{b}}$

Somit :

$$y'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{p\to\infty}\frac{1}{x}\cdot \ln\left(1+\frac{1}{p}\right)^p = \frac{1}{x}\cdot \lim_{p\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{p}\right)^p$$

$$= \frac{1}{x}\cdot \ln\left(\lim_{p\to\infty}\left(1+\frac{1}{p}\right)^p\right) = \frac{1}{x}\cdot \ln(e) = \frac{1}{x}$$

da ln x stetig

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$al\lg.: \quad (\ln|x|)' = \frac{1}{x} \qquad \text{für } x \neq 0$$

$\text{Ableitung der e-Funktion:}$

$$f(x) = y(x) = \ln(x) \qquad f'(x) = y'(x) = \frac{1}{x}$$

$$\text{Umkehrfunktion } g(x) = e^x \quad g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{\frac{1}{e^x}} = e^x$$

Ableitung der allg. Potenzfunktion

$$y = x^\alpha \qquad \alpha \in R \qquad \text{Beh.: } \frac{dy}{dx} = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$$

$$y = x^\alpha = e^{\alpha \cdot \ln x} = e^u \qquad \text{mit } u = \alpha \cdot \ln x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = e^u \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha \cdot \frac{e^{\ln x \cdot \alpha}}{x} = \alpha \cdot \frac{x^\alpha}{x}$$

$$= \alpha \cdot x^{\alpha-1}$$

Ableitung der Funktion f(x) = x^x

$$y(x) = x^x = e^{\ln x \cdot x} = e^n \qquad \text{mit } u = x \cdot \ln x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = e^u \cdot \left(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right) = e^u \cdot (\ln x + 1)$$

Somit:

$$\left(x^x\right)' = x^x \cdot (1 + \ln x)$$

8.3.2. Hyperbelfunktionen und deren Umkehrfunktionen

Hyperbelfunktionen

In praktische Anwendungen treten Funktionen auf, die aus den beiden e-Funktionen f(x) = e^x und f(x) = e^{-x} zusammengesetzt sind. Sie werden als Hyperbelfunktion bezeichnet.

Def. der Hyperbelfunktionen

Sinus hyperbolicus $y(x) = \sinh x = \frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right)$

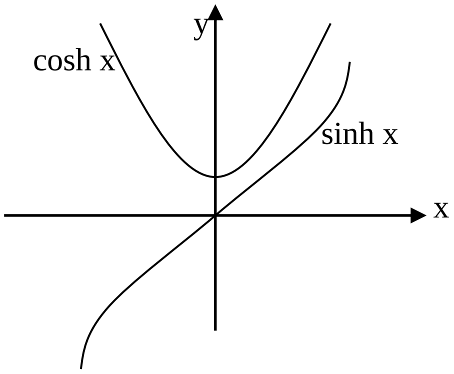
Kosinus hyperbolicus $y(x) = \cosh x = \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right)$

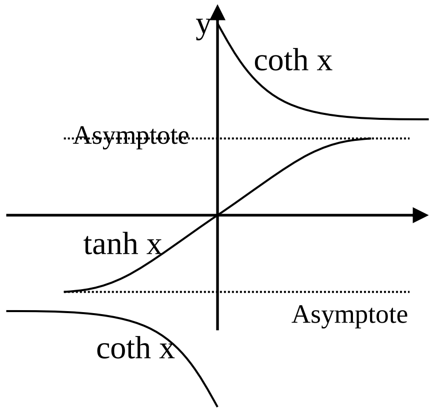
Tangens hyperbolicus $y(x) = \tanh x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$

Kotangens hyperbolicus $y(x) = \coth x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{e^{x} - e^{-x}}$

Anm.: Hyperbelfunktionen sind nicht periodische Funktionen

Funktionsgraph





Bsp.:

Eine an zwei Punkten P_1 und P_2 in gleicher Höhe freihängende Kette nimmt folgende Form an

$$y(x) = c \cdot \cosh(a \cdot x) \qquad \text{c, a konst. (Kettenlinie)}$$

Beziehungen zwischen den Hyperbelfunktionen

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \qquad \coth = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{1}{\tanh x}$$

Additionstheoreme

$$\sinh(x_1 \pm x_2) = \sinh x_1 \cdot \cosh x_2 \pm \cosh x_1 \cdot \sinh x_2$$
$$\cosh(x_1 \pm x_2) = \cosh x_1 \cdot \cosh x_2 \pm \sinh x_1 \cdot \sinh x_2$$
$$\tanh(x_1 \pm x_2) = \frac{\tanh x_1 \pm \tanh x_2}{1 \pm \tanh x_1 \cdot \tanh x_2}$$