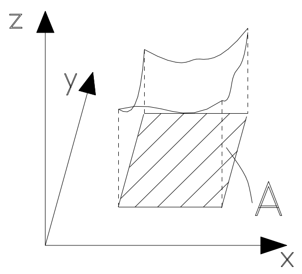
11 Integration von Funktionen mehrerer Unabhängiger Variablen

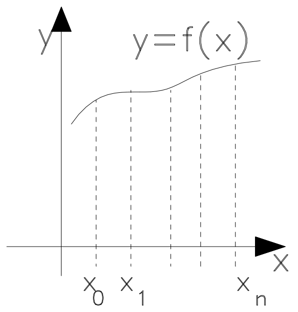
11.1 Einführung

Wir betrachten z = f(x,y) stetig



Gesucht ist das Volumen, das durch die Funktion f(x,y) über der Fläche A (A ist in der x-y-Ebene) definiert ist.

Erinnerung an den 2-dimensionalen Fall:



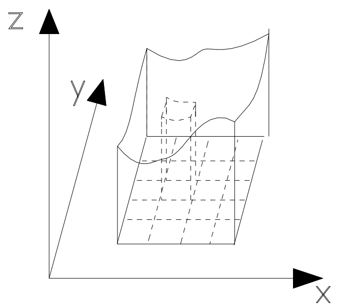
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i}) \cdot \Delta x$$

mit $\overline{x_i} \in [x_i ; x_{i+1}]$

Für hinreichend feine Unterteilung des Intervalls [a,b] führt die Trapez- oder Simpson-Formel zu einem guten Näherungswert.

Übertragung auf den 3-dimensionalen Fall:

Wir betrachten statt der kleinen Rechteckstücke kleine Volumenstücke (Quader) die aufsummiert werden.
d.h.



$$V = \int dV = \iint_A f(x, y)dA$$

$$:= \lim_{\Delta A_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \overline{z_i} \cdot \Delta A_i$$

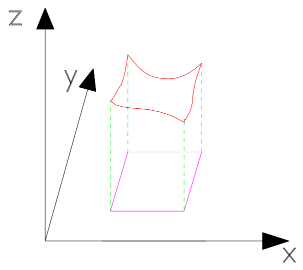
$\overline{z_i}$ ist der Funktionswert an einer beliebigen Stelle im Flächenstück ΔA_i.

Bsp:

Gegeben sei die Funktion $f(x,y) = xy^2$

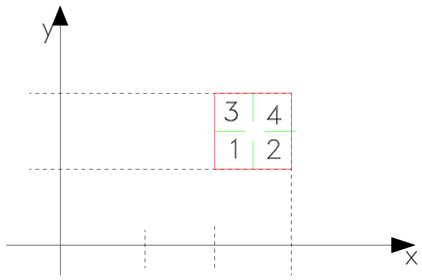
Gesucht ist ein Näherungswert für $\iint\limits_A xy^2 dA$

$$A = \{(x,y) \mid x \in [2,3] \; y \in [1,2]\}$$

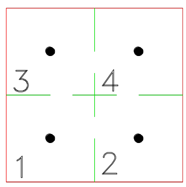


Bestimme Näherungswert

1. Zerlegen der Fläche A



In 4 gleich große Quadrate



Wähle für $\overline{z_i}$ Wert im Mittelpunkt von A_i.

i	Mittelpunkt A_i	$\overline{z_i}$
1	(2,25/1,25)	3,52
2	(2,75/1,25)	4,3
3	(2,25/1,75)	6,89
4	(2,75/1,75)	8,42

$$\iint\limits_A xy^2 dA = \sum_{i=1}^{4} \overline{z}_i \underbrace{\Delta A_i}_{=\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{4} \overline{z}_i = 5.78$$

Der exakte Wert ist 5.8333

Definition:

Gegeben sei f(x,y) auf dem Definitionsbereich A

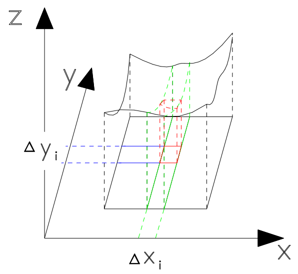
Falls für jede beliebige Unterteilung der Fläche A in ΔA_i und für Funktionswerte $f(x_i,y_i)$ mit (x_i,y_i) beliebig aus ΔA_i gilt:

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ (\Delta A_i \to 0)}} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{f(x_i, y_i) \cdot \Delta A_i}_{\text{kleiner Quader}} = I_0 \qquad \text{dann ist} \qquad I_0 = \iint\limits_A f(x,y) dA$$

(Doppelintegral)

11.2 Iteriertes Integral

Gesucht ist der exakte Wert des Integrals $\iint\limits_A xy^2 dA$



Wir zerlegen das Intervall auf der x-Achse in kleine Stücke Δx_i und das Intervall auf der y-Achse in kleine Stücke Δy_i.

1. Wir betrachten den kleinen „Volumenbeitrag“ ΔV_{ij} (Volumen über dem aus Δx_i und Δy_i gebildeten Flächenstück)

$$\Delta V_{ij} \approx \Delta x_i \cdot \Delta y_i \cdot f(x_i, y_i)$$

Anmerkung:

Je feiner die Unterteilung wird, desto besser wird der Näherungswert; d.h. im Grenzfall erhalten wir den exakten Integralwert.

2. Wir betrachten die Scheibe, die für ein festes Δx_i und ein variables Δy_j herausgeschnitten wird (parallel zur yz-Ebene).
   Volumen der Scheibe:

$$V_i = \sum_{j=1}^{n} \Delta V_{ij} \approx \Delta x_i \sum_{j=1}^{n} f(x_i, y_j) \cdot \Delta y_j$$

3. Die Summation aller Scheiben ergibt das „Volumen“ bzw. das gesuchte Integral:

$$V = \sum_{i=1}^{m} V_i = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \Delta V_{ij} \approx \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} f(x_i, y_j) \cdot \Delta y_j\right) \cdot \Delta x_i$$

Im Grenzfall Δx_i -> 0 und Δy_j -> 0 erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\iint\limits_A f(x,y)dA &= \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ \Delta y_j \to 0}} \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} f(x_i, y_j) \cdot \Delta y_j\right) \cdot \Delta x_i \\
&= \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{m}\left(\lim_{\Delta y_j \to 0} \sum_{j=1}^{n} f(x_i, y_j) \cdot \Delta y_j\right) \cdot \Delta x_i \\
&= \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{m}\left(\int_{y_u}^{y_o} f(x_i, y) dy\right) \cdot \Delta x_i \\
&= \int_{x_u}^{x_o}\left(\int_{y_u}^{y_o} f(x,y) dy\right) dx
\end{aligned}$$

Summiert man zuerst in den Scheiben für festes Δy_j (anstatt festes Δx_i), so wird in der Integraldarstellung die Summation nach x und y vertauscht.

<u>Zusammenfassung:</u>

Für stückweise stetige Funktionen f(x,y) gilt:

$$\boxed{\iint_A f(x,y)dA = \int_{y_u}^{y_o}\left(\int_{x_u}^{x_o} f(x,y)dx\right)dy = \int_{x_u}^{x_o}\left(\int_{y_u}^{y_o} f(x,y)dy\right)dx}$$

Anmerkung:

Gilt allgemein für $f(x_1,x_2, \ldots ,x_n)$

Bsp:

$$\iint_A xy^2 dA \quad \text{mit} \quad A = \{(x,y)\ |x \in [2,3]\ y \in [1,2]\}$$

$$= \int_1^2\left(\int_2^3 xy^2 dx\right)dy = \int_1^2 y^2\left(\int_2^3 x dx\right)dy$$

$$= \int_1^2 y^2\left(\left[\frac{x^2}{2}\right]_2^3\right)dy$$

$$= \left(\left[\frac{x^2}{2}\right]_2^3\right)\cdot\int_1^2 y^2 dy$$

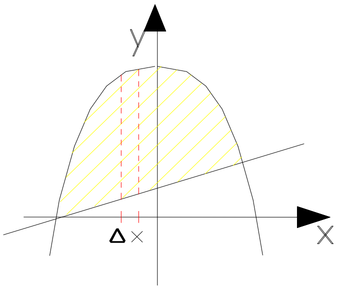
$$= \left(\left[\frac{x^2}{2}\right]_2^3\right)\cdot\left(\left[\frac{y^3}{3}\right]_2^3\right)$$

$$= \frac{1}{2}(9-4)\cdot\frac{1}{3}(8-1) = \frac{5}{2}\cdot\frac{7}{3} = \frac{35}{6}$$

Die Vertauschung der Reihenfolge liefert das gleiche Ergebnis :

$$\int_2^3\left(\int_1^2 xy^2 dy\right)dx = \frac{35}{6}$$

Gesucht ist der Flächeninhalt, der durch die Funktionen $y_1 = -x^2 + 4$ und $y_2 = \frac{1}{2}x + 1$ gegeben ist.



1. Schnittpunktbestimmung:

$$-x^2 + 4 = \frac{1}{2}x + 1$$

pq-Formel $\Rightarrow x_1 = -2$

$$x_2 = 1.5$$

Idee:

Wir bestimmen das Volumen des Körpers mit der gegebenen Fläche und der Höhe 1.
Klar: V = F*1

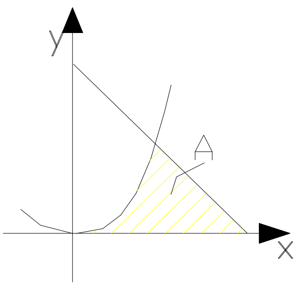
$$V = \int_{-2}^{1.5}\left(\int_{\frac{1}{2}x+1}^{-x^2+4} 1\,dy\right)dx = \int_{-2}^{1.5}\left([y]_{\frac{1}{2}x+1}^{-x^2+4}\right)dx = \int_{-2}^{1.5}\underbrace{\left(-x^2+4\right)}_{f_o(x)} - \underbrace{\left(\frac{1}{2}x+1\right)}_{f_u(x)}dx$$

$$= \int_{-2}^{1.5}\left(-x^2 - \frac{1}{2}x + 3\right)dx = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{1}{4}x^2 + 3x\right]_{-2}^{1.5} \approx 7.15 \approx V = F$$

Bsp:

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

Die Fläche A in der x-y-Ebene sei gegeben durch eine Parabel $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ und eine Gerade $g(x) = 4 - x$ sowie durch die positive x-Achse.



Gesucht ist das Volumen, das die Funktion f(x,y) über der Fläche A aufspannt.

Variante 1:

$$\iint_A f(x,y)\,dA = \int_a^b\left(\int_c^d \left(x^2+y^2\right)dx\right)dy$$

$$= \int_0^2\left(\int_{\sqrt{2y}}^{4-y}\left(x^2+y^2\right)dx\right)dy$$

$$= \int_0^2\left(\left[\frac{x^3}{3}+y^2x\right]_{\sqrt{2y}}^{4-y}\right)dy$$

$$= \int_0^2\left(\left(\frac{\left(4-y^3\right)}{3}+y^2(4-y)\right)-\left(\frac{\left(\sqrt{2y}\right)^3}{3}+y^2\sqrt{2y}\right)\right)dy$$

$$=\left[-\frac{(4-y)^4}{12}+\frac{4}{3}y^3-\frac{1}{4}y^4-\left(\sqrt{2}\right)^3\frac{2}{3\cdot 5}y^{\frac{5}{2}}-\sqrt{2}\,\frac{2}{7}y^{\frac{7}{2}}\right]_0^2$$

$$= 19.96$$

Wird zuerst nach x integriert, müssen die Gleichungen nach x

$y = 4 - x \Rightarrow x = 4 - y \;= d$

$y = \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow x = +\sqrt{2y} \;= c$

aufgelöst werden.

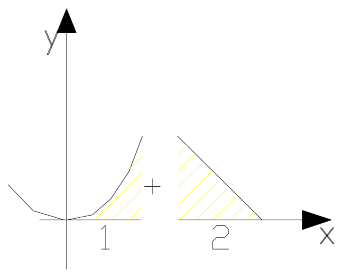
- In unserem Beispiel interessiert nur der Positive Ast der Parabel; sonst $x = \pm\sqrt{2y}$

Variante 2:

Zuerst nach y, dann nach x integrieren.

2 Fälle:

1. Begrenzung durch Parabel
2. Begrenzung durch Gerade



$$\int_a^b\left(\int_c^d\left(x^2+y^2\right)dy\right)dx = \int_0^2\left(\int_0^{\frac{x^2}{2}}\left(x^2+y^2\right)dy\right)dx + \int_2^4\left(\int_0^{4-x}\left(x^2+y^2\right)dy\right)dx$$

$$= \int_0^2\left[x^2y+\frac{y^3}{3}\right]_0^{\frac{x^2}{2}}dx = \int_0^2\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{24}\,dx = 3.96$$

$$= \int_2^4\left[x^2y+\frac{y^3}{3}\right]_0^{4-x}dx = \int_2^4 4x^2-x^3+\frac{(4-x)^3}{3}\,dx = 16$$

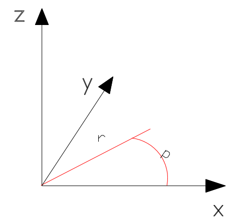
Auch diese Rechnung ergibt das Ergebnis von 19.96.

11.3 Integration in Polar- und Zylinderkoordinaten

Bestimmte Sachverhalte lassen sich in Polarkoordinaten einfacher beschreiben.
Polarkoordinaten:

Bsp:
$r(\varphi) = \text{const}$ (Kreis)

Zylinderkoordinaten: (r, φ, z)



x-y-Ebene wird durch Polarkoordinaten(r,φ) dargestellt.
z Koordinate ist die Höhe des Zylinders

Bsp(1):

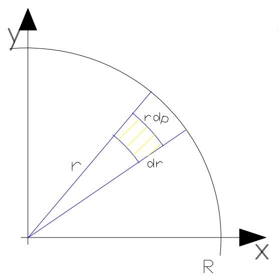
$$f(r,\varphi) = 1$$

$$A = \{(r,\varphi) \mid r \in [0,R] \text{ und } \varphi \in [0,2\pi]\}$$

Beschreibt einen Kreis mit dem Radius R

$$\iint_A dA = \pi R^2 \qquad \text{(Kreisfläche)}$$

Herleitung:



$$dA = dr \cdot r \cdot d\varphi$$

$$\iint f(r,\varphi)\, dA = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^R 1 \cdot r\, dr\right) d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi}\frac{R^2}{2}\, d\varphi$$

$$= \frac{R^2}{2}[\varphi]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{R^2}{2}2\pi$$

$$= \pi R^2$$

Anmerkung:

$\iint\limits_A 1 dA$ heißt Flächenintegral

Bsp(1):

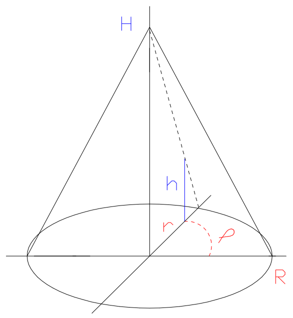
Berechnung des Kegelvolumens

Variante 1:

$$V = \iint f(r,\varphi) \underbrace{dA}_{r\,dr\,d\varphi}$$

Höhe: H

Grundkreisradius: R

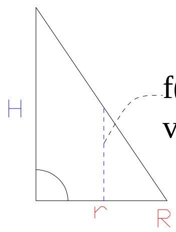


$0 \leq r \leq R$

$0 \leq \varphi \leq$

2π

f(r,φ) = ?



f(r,φ) unabhängig.
von φ

$$\frac{f(r,\varphi)}{R-r} = \frac{h}{R} \Leftrightarrow \quad f(r,\varphi) = \frac{h}{R}(R-r)$$

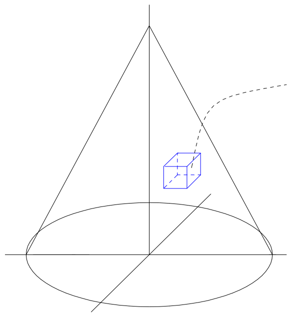
$$V = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^R \frac{h(R-r)}{R} r\,dr\right)d\varphi \quad = \frac{h}{R}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^R \left(R\cdot r - r^2\right)dr\right)d\varphi \quad = \frac{h}{R}\int_0^{2\pi}\left(\left[\frac{R\cdot r^2}{2} - \frac{r^3}{3}\right]_0^R\right)d\varphi$$

$$= \frac{h}{R}\int_0^{2\pi}\left(\frac{R^3}{2} - \frac{R^3}{3}\right)d\varphi \quad = \frac{h}{R}\left(\frac{R^3}{2} - \frac{R^3}{3}\right)\left(\left[\varphi\right]_0^{2\pi}\right) \quad = \frac{hR^2}{6}2\pi$$

$$V = \frac{\pi}{3}hR^2$$

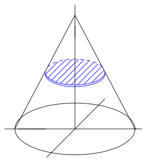
Variante 2:

$$V = \iiint 1\,dV \qquad \text{Summation aller Volumenelemente dV}$$



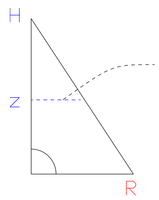
$$dV = \underbrace{dA\;dz}_{\text{"Quader"}} = r\,dr\,d\varphi\,dz$$

$$V = \int_0^H \int_0^{2\pi} \int_0^{R(z)} 1\,r\,dr\,d\varphi\,dz$$



Summation der Scheibe
(Volumen der Scheibe)

$R(z) = ?$



$$\frac{R(z)}{H-z} = \frac{R}{H}$$

$$\Rightarrow R(z) = \frac{R}{H}(H-z)$$

$$V = \int_0^H \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{R}{H}(H-z)} 1\;\; r\,dr\,d\varphi\,dz = \int_0^H \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{\frac{R}{H}(H-z)} d\varphi dz$$

$$= \int_0^H \frac{R^2}{2h^2}(h-z)^2\, 2\pi dz = \frac{\pi}{3} hR^2$$

<u>Zusammenfassung:</u>

1) Das Volumen, das eine Funktion f(r,φ) in Polarkoordinaten über einer Fläche A aufspannt, berechnet sich durch

$$\boxed{\iint f(r,\varphi)\,dA = \int_\varphi \int_r f(r,\varphi)\,r\,dr\,dz}$$

2) Ist eine Funktion f(r,φ,z) in Zylinderkoordinaten gegeben, so erfolgt die Integration nach

$$\boxed{\int_z \int_\varphi \int_r f(z,r,\varphi)\,r\,dr\,d\varphi\,dz}$$

Kernproblem : Bestimmung der Integrationsgrenzen.