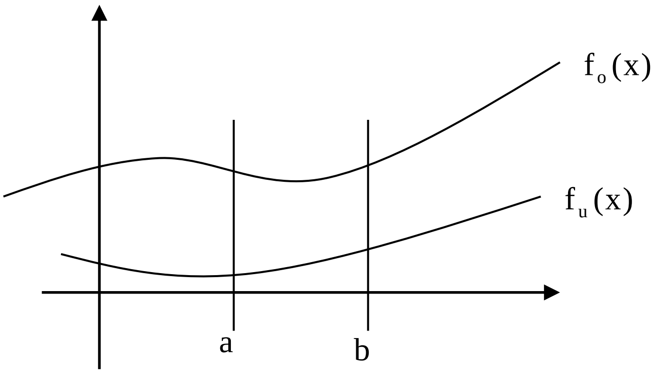
7. Anwendungen der Integralrechnung

7.1 Zweidimensionale Objekte

7.1.1. Flächeninhalt



Fläche zwiscen $f_o(x)$ und $f_u(x)$ wobei $f_o(x) > f_u(x)$

$$\int_a^b f_o(x)dx - \int_a^b f_u(x)dx = \int_a^b [f_o(x) - f_u(x)]dx$$

Diese Formel gilt allgemein unabhängig davon, wo die Fläche liegt, falls gilt $f_o(x) > f_u(x)$.

Bsp.:

Flächeninhalt der von $f_o(x) = 2 - x$ und $f_u(x) = x^2 - 2x$ *eingeschlossenen Fläche.*

Schnittpunkte :

$x^2 - 2x = 2 - x$

$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 2 \qquad x_2 = -1$

Im Intervall $[-1;2]$ gilt $f_o(x) \geq f_u(x)$

Somit :

$$Fläche = \int_{-1}^{2} f_o(x) - f_u(x)dx = \int_{-1}^{2} 2 - x - (x^2 - 2x)dx$$

$$= \int_{-1}^{2} 2 - x - x^2 + 2x\,dx = \int_{-1}^{2} -x^2 + x + 2\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-1}^{2}$$

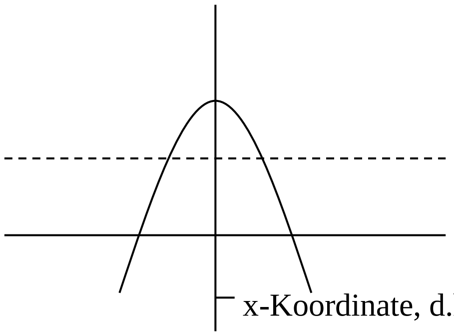
$$= -\frac{8}{3} + \frac{4}{2} + 4 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2\right) = -\frac{16}{6} + \frac{12}{6} + \frac{24}{6} - \left(\frac{2}{6} + \frac{3}{6} - \frac{12}{6}\right)$$

$$= \frac{27}{6}$$

7.1.2. Flächenmomente 1. Ordnung

Bsp.: Gesucht ist der Schwerpunkt der von der Funktion $f(x)=4-x^2$ und Der x-Achse aufgespannten Fläche.

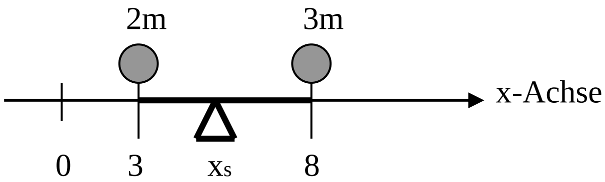
Erster Ansatz: Zeichnerische Bestimmung einer Näherungslösung



Anschaulich erkennbar :
x-Koordinate und y-Koordinate können unabhängig voneinander nach demselben Prinzip berechnet werden.
Insbesondere : Drehung oder Verschiebung der Fläche ändert Schwerpunkt innerhalb der Fläche nicht.

Prinzip der Schwerpunktbestimmung

Gegeben sei Masse m

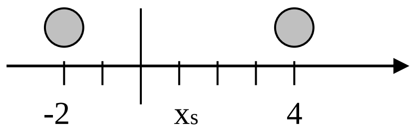


Frage : Wo (x_s=?) muß die masselose Stange unterstützt werden, damit sie im Gleichgewicht ist ?

$$\text{Gleichgewicht: } 2m(x_s-3)=3m(8-x_s)$$
$$\Leftrightarrow 2mx_s-2m\cdot 3=3m\cdot 8-3m\cdot x_s \qquad /+2m\cdot 3 \quad +3mx_s$$
$$\Leftrightarrow 2mx_s+3m\cdot x_s=3m\cdot 8+2m\cdot 3$$
$$\Leftrightarrow x_s(2m+3m)=3m8+2m3 \qquad /:(2m+3m)$$
$$\Leftrightarrow x_s=\frac{3m8+2m3}{2m+3m}=\frac{30m}{5m}=6$$

Allgemein :

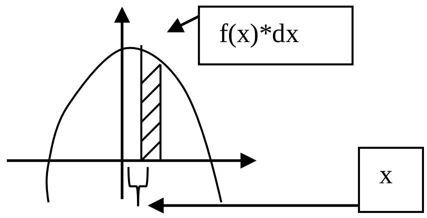
$$\boxed{x_s=\frac{\sum_{i=1}^{n} m_{x_i}\cdot x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_{x_i}}}$$



$$x_s = \frac{2m \cdot -2 + 2m \cdot 4}{4m} = 1$$

<u>Übertragung des Schwerpunktprinzips auf kontinuierliche Flächen gleicher Dicke</u>

Bestimmung der x-Koordinate des Schwerpunktes der Fläche
fx*dx:



$\sum$ *geht* über in Integral $\Rightarrow$ $\boxed{x_S = \frac{\int_a^b x \cdot f(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}}$

<u>Bsp.:</u>

$$f(x) = 4 - x^2$$

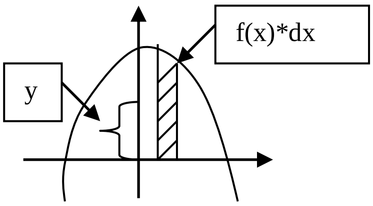
$$a = -2 \qquad b = 2$$

$$x_s = \frac{\int_{-2}^{+2} x \cdot (4 - x^2)dx}{\int_{-2}^{+2} (4 - x^2)dx} = \frac{\int_{-2}^{+2} 4x - x^3 dx}{\int_{-2}^{+2} 4 - x^2 dx} = \frac{\left[4 \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_{-2}^{+2}}{\left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{+2}}$$

$$= \frac{4 \cdot \frac{4}{2} - \frac{16}{4} - \left(4 \cdot \frac{4}{2} - \frac{16}{4}\right)}{8 - \frac{8}{3} - \left(-8 + \frac{8}{3}\right)} = 0$$

d.h. $x_s = 0 \Rightarrow$ Schwerpunkt liegt auf der y - Achse

Bestimmung der y-Koordinate des Schwerpunktes der Fläche
fx*dx:



Der Schwerpunkt der y-Koordinate = ½ f(x) (halbe Höhe!)

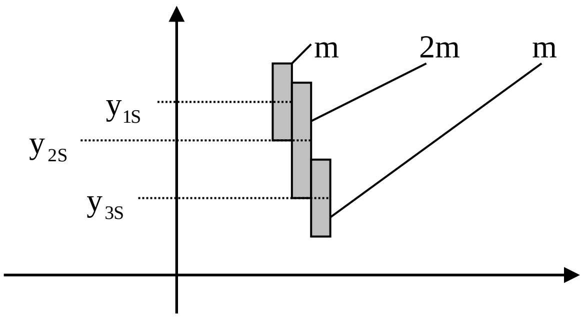
$$\sum \textit{ geht} \text{ über in Integral } \Rightarrow \quad y_S = \frac{\int_a^b \frac{1}{2} f(x) \cdot f(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}$$

$$y_S = \frac{\frac{1}{2}\int_{-2}^{+2}(4-x^2)^2 dx}{\int_{-2}^{+2} 4-x^2 dx} = \frac{\frac{1}{2}\int_{-2}^{+2} 16-8x^2+x^4 dx}{8-\frac{8}{3}+8-\frac{8}{3}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\left[16x-8\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}\right]_{-2}^{+2}}{16-\frac{16}{3}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\left(32-\frac{64}{3}+\frac{32}{5}-\left(-32+\frac{64}{3}-\frac{32}{5}\right)\right)}{\frac{48-16}{3}} = \frac{32-\frac{64}{3}+\frac{32}{5}}{\frac{32}{3}} = \frac{\frac{480-320+96}{15}}{\frac{32}{3}}$$

$$= \frac{256}{15}\,\frac{3}{32} = \frac{256}{160} = \frac{32}{20} = \frac{8}{5}$$

Bsp.:

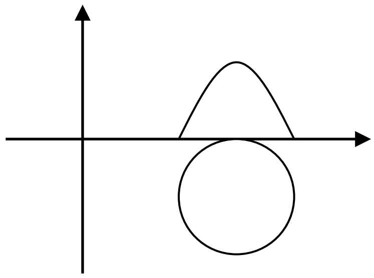


$$y_s = \frac{y_{1s}m + y_{2s}2m + y_{3s}m}{m+2m+m}$$

$$y_s = \frac{3\cdot m + 2\cdot 2m + 1\cdot m}{m+2m+m} = \frac{8m}{4m} = 2$$

d.h. Schwerpunkt der Gesamtfläche ergibt sich aus Schwerpunkten der Einzelflächen.

Bsp.: Gesucht ist der Schwerpunkt des Körpers, der durch die Fläche1, die von der Funktion f(x) = -(x-1)(x-3) und der x-Achse aufgespannt wird (Flächendichte = 3 kg/FE) und der Kugel homogener Dichte vom Radius 1, deren Mittelpunkt in P(2/-1) ist von der Masse 2 kg.



$f(x) = -x^2 + 4x - 3$ Nullstellen: 1 und 3

Scheitel: $f'(x) = -2x + 4 = 0$ => Scheitel(2/1)

Klar: Schwerpunkt der Kugel in P(2/-1)

Berechnung Schwerpunkt der Parabel:

1."Fläche":

$$\int_1^3 -x^2 + 4x - 3dx = \frac{4}{3}$$

$$x_{sp} = \frac{\int_1^3 x(-x^2 + 4x - 3)dx}{4/3} = 2$$

Zur Berechnung von y_{sp} wird die Fläche um 2 nach links verschoben

Dann :

$$y_{sp} = \frac{\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}[-(x+1)(x-1)]^2 dx}{4/3} = \frac{3}{8}\int_{-1}^{1} x^4 - 2x^2 + 1dx =$$

$$= \frac{3}{8}[\frac{x^5}{5} - 2\frac{x^3}{3} + x]_{-1}^{+1} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

Schwerpunkte :

Kugel : 2 kg S(2/ -1)

Parabel : $\frac{3\text{kg}}{\text{FE}} * \frac{4}{3} FE = 2kg$ $S(2/\frac{2}{5})$

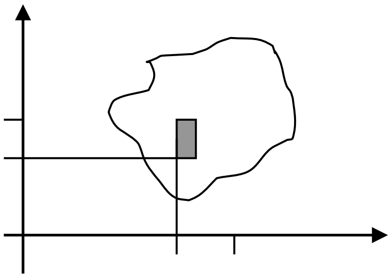
Insgesamt :

$x_s = 2$

$$y_s = \frac{-1*2kg + 2/5*4kg}{6kg} = \frac{-2+8/5}{6} = \frac{-2/5}{6} = -\frac{1}{15}$$

Allgemeine Definition des Schwerpunktes

Gegeben sei ein beliebiger flächenhafter Körper homogener Dichte



Der Schwerpunkt wird wie folgt definiert:

$$x_s = \frac{1}{A}\int_{(A)} x\,dA \qquad\qquad y_s = \frac{1}{A}\int_{(A)} y\,dA$$

$$M_x = \int_{(A)} y\,dA$$ heißt statisches Moment 1. Ordnung bezüglich der x - Achse (Abstand y)

$$M_y = \int_{(A)} x\,dA$$ heißt statisches Moment 1. Ordnung bezüglich der y - Achse (Abstand x)

Hiermit erhalten wir :

$$x_s = \frac{M_y}{A} \quad \text{und} \quad y_s = \frac{M_x}{A}$$