Weitere Beziehungen

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$
$$\sinh(2x) = 2\sinh x \cdot \cosh x$$
$$\cosh(2x) = \sinh^2 x + \cosh^2 x$$

Bezug zu den trigonometrischen Funktionen

$$\cos x = \frac{1}{2}\left(e^{jx} + e^{-jx}\right)$$
$$\sin x = \frac{1}{2}\left(e^{jx} - e^{-jx}\right)$$

$\Rightarrow$ Darstellung im Bereich der komplexen Zahlen C

(Anm.: $j = \sqrt{-1}$)

Ableitung der Hyperbelfunktionen

$$(\sinh x)' = \left[\frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right)\right]' = \frac{1}{2}\left(e^{x} - \left(-e^{-x}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right) = \cosh x$$
$$(\cosh x)' = \left[\frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right)\right]' = \frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right) = \sinh x$$
$$(\tanh x)' = \left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right)' = \frac{\cosh x \cdot \cosh x - \sinh x \cdot \sinh x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x}$$
$$(\coth x)' = \left(\frac{\cosh x}{\sinh x}\right)' = \frac{\sinh x \cdot \sinh x - \cosh x \cdot \cosh x}{\sinh^2 x} = \frac{-1}{\sinh^2 x}$$

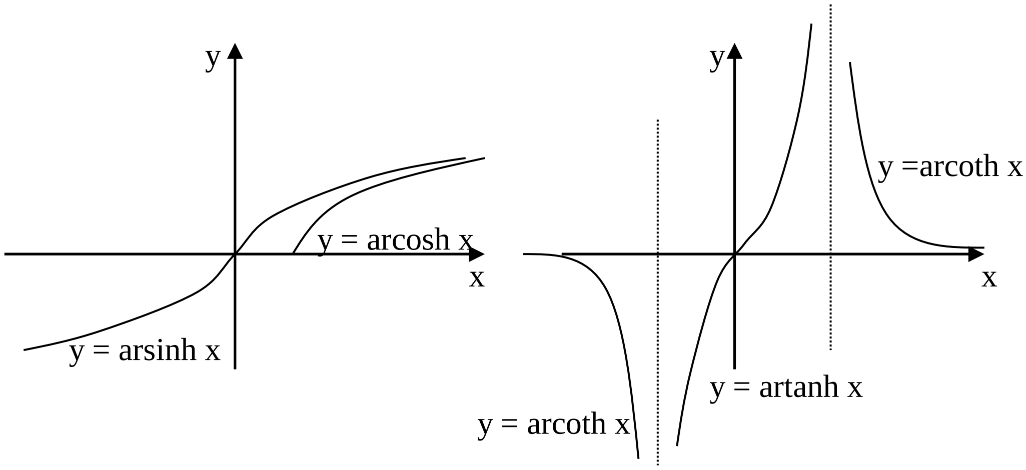
Areafunktionen (Umkehrfunktion der Hyperbelfunktion)

f(x) = sinh x und f(x) = tanh x sind streng monoton wachsend
$\Rightarrow$es existiert die Umkehrfunktion.
f(x) = cosh (x) wird eingeschränkt auf $[0,\infty)$, dann str. m. w.
f(x) = coth (x) ist in $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ str. m. f.

so, daß insgesamt folgende Umkehrfunktionen definiert werden :
(Anm.: ln x ist Umkehrfunktion von e^x, so daß Definition der Areafunktion mit ln x erfolgt)

Areasinus hyperbolicus	$y = \operatorname{ar}\sinh x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$	$-\infty < x < \infty$
Areakosinus hyperbolicus	$y = \operatorname{ar}\cosh x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$	$1 \le x < \infty$
Areatangens hyperbolicus	$y = \operatorname{ar}\tanh x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$	$\lvert x\rvert < 1$
Areakotangens hyperbolicus	$y = \operatorname{ar}\coth x = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}$	$\lvert x\rvert > 1$

Funktionsgraph



Herleitung von :

$$y = ar\sinh x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

$$y = \sinh x \Rightarrow \textit{Umkehrfunktion}: \; x = \sinh y = \frac{1}{2}\left(e^y - e^{-y}\right)$$

$$\textit{Auflösen} \text{ nach y}: \quad x = \frac{1}{2}\left(e^y - e^{-y}\right) \qquad / \cdot 2$$

$$\Leftrightarrow 2x = e^y - e^{-y} \qquad / \cdot \mathrm{e}^y$$

$$\Leftrightarrow 2x\mathrm{e}^y = \left(e^y\right)^2 - 1 \qquad / - 2x\mathrm{e}^y$$

$$\Leftrightarrow \left(e^y\right)^2 - 2x\mathrm{e}^y - 1 = 0 \qquad \text{Setze } u = \mathrm{e}^y \text{ dann folgt}$$

$$u^2 - 2xu - 1 = 0 \Rightarrow u_{1,2} = x \pm \sqrt{x^2+1} > 0$$

$$u_1 = x + \sqrt{x^2+1}$$

$$u_2 = x - \sqrt{x^2+1}$$

$$\textit{da } u = e^y > 0 \text{ folgt } u_1 = x + \sqrt{x^2+1} \text{ ist Lösung}$$

$$\text{d.h.} \quad \mathrm{e}^y = x + \sqrt{x^2+1} \qquad \text{logarithmieren}: \; y = \ln \mathrm{e}^y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$$

Ableitungen der Areafunktionen

$$y = ar\sinh x \qquad y' = ?$$

Verwende implizite Darstellung:

$$\sinh y = x \Rightarrow \frac{d \sinh y}{dx} = \frac{dx}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{d \sinh y}{dx} \cdot \frac{dy}{dx} = 1$$

$$\Rightarrow \cosh y \cdot y' = 1 \Rightarrow y' = \frac{1}{\cosh y}$$

$$\text{mit } \cosh y = \sqrt{1 + \sinh^2 y} = \sqrt{1+x^2}$$

$$\Rightarrow y'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$y = \operatorname{artanh} x$

Verwende implizite Darstellung: $\tanh y = x$

$$\frac{d\tanh y}{dx} = \frac{dx}{dx} \Rightarrow \frac{d\tanh y}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(\cosh y)^2} y' = 1$$

Nebenrechnung:

$$\frac{1}{(\cosh y)^2} = \frac{(\cosh y)^2 - (\sinh y)^2}{(\cosh y)^2} = 1 - \left(\frac{\sinh y}{\cosh y}\right)^2 = 1 - \tanh^2 y$$

$$\Rightarrow (1 - \tanh^2 y) \cdot y' = 1$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{1 - \tanh^2 y} \Rightarrow y' = \frac{1}{1 - x^2}$$

Analog erhält man durch implizite Differentiation die Ableitungen der weiteren Areafunktionen.

<u>Zusammenfassung</u>

$$(\operatorname{arsinh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$(\operatorname{arcosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$(\operatorname{artanh} x)' = \frac{1}{1 - x^2}$$

$$(\operatorname{arcoth} x)' = \frac{1}{1 - x^2}$$

<u>Bsp.:</u>

(1.)

Bestimmung der Ableitung von $f(x) = \sinh 2x \cdot \cosh 2x$

$$f'(x) = (\sinh 2x)' \cdot (\cosh 2x) + \sinh 2x \cdot (\cosh 2x)'$$

<u>Nebenrechnung</u>: (Kettenregel)

$$(\sinh 2x)' = (\sinh u)' \cdot u' = u' \cdot \cosh u = 2 \cdot \cosh u = 2\cosh 2x$$

$$(\cosh 2x)' = (\cosh u)' \cdot u' = u' \cdot \sinh u = 2 \cdot \sinh u = 2\sinh 2x$$

Somit

$$f'(x) = 2(\cosh 2x)\cdot\cosh 2x + (\sinh 2x)\cdot 2\cdot(\sinh 2x)$$
$$= 2(\cosh 2x)^2 + 2(\sinh 2x)^2$$
$$= 2\left((\cosh 2x)^2 + (\sinh 2x)^2\right)$$

mit $\cosh 2x = \sinh^2 x + \cosh^2 x$

$\Rightarrow \quad = 2\cosh 4x$

(2.)

$y = \operatorname{ar}\tanh\frac{x}{3} \qquad y' = ?$

$y = \operatorname{ar}\tanh u \qquad u = \frac{x}{3}$

$$y' = \frac{1}{1-u^2}\cdot u' = \frac{1}{1-\frac{x^2}{9}}\cdot\frac{1}{3} = \frac{3}{9-x^2}$$

8.4. Das Tangentenverf. v. Newton zur näherungsweisen Lösung einer Gleichung

Gesucht ist die Lösung der Gleichung f(x) = 0.
Falls f(x) stetig ist kann Regula Falsi angewendet werden.

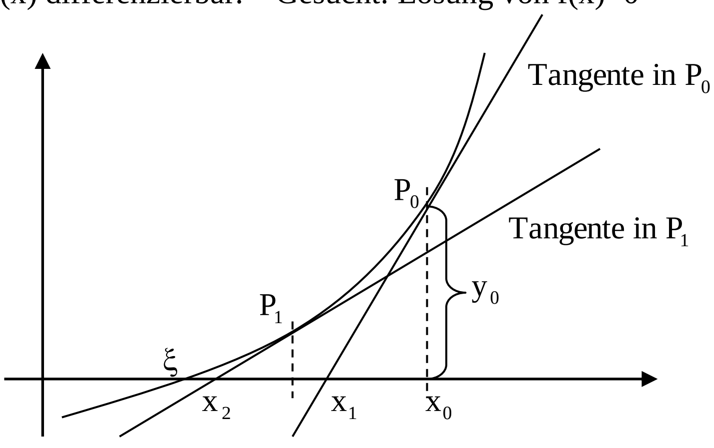
Newtonverfahren ist Iterationsverfahren, d.h.
ausgehend von Anfangswert x_0 werden Näherungswerte $x_1, x_2, x_3, \ldots$ berechnet $\rightarrow$ es entsteht eine Folge $x_1, x_2, x_3, \ldots$ von Näherungswerten.

Unter bestimmten Voraussetzungen konvergiert diese Folge gegen den exakten Wert ξ,
d.h.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$$

Herleitung des Verfahren

Sei f(x) differenzierbar. Gesucht: Lösung von f(x)=0



x_0 : Startwert

Gesucht : Näherungswert x_1

Bekannt : $f(x)$ ist differenzierbar, d.h. es existiert eine Tangente in P_0

x_1 ist Schnittpunkt der Tangente in P_0 mit der x - Achse $\Rightarrow$ Punkt P_1

Schnittpunkt der Tangente in P_1 mit x - Achse liefert Näherungswert x_2 u.s.w.

Idee: Die Funktion wird in der Nähe der gesuchten Nullstelle ξ durch die Tangente ersetzt (Linearisierung) :

<u>Berechnung von x_1 :</u>

Steigung der Tangente in $P_0(x_0 / y_0)$

$$f'(x_0) = \frac{y_0}{x_0 - x_1} \quad \text{Steigungsdreieck}$$

$$\Leftrightarrow (x_0 - x_1) \cdot f'(x_0) = y_0$$

$$\Leftrightarrow x_0 - x_1 = \frac{y_0}{f'(x_0)} \Leftrightarrow x_0 - \frac{y_0}{f'(x_0)} = x_1$$

$$\Leftrightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

<u>Berechnung von x_2 :</u>

Steigung der Tangente in $P_1(x_1 / f(x_1))$

$$f'(x_1) = \frac{f(x_1)}{x_1 - x_2} \Leftrightarrow (x_1 - x_2) \cdot f'(x_1) = f(x_1)$$

$$\Leftrightarrow x_1 - x_2 = \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \Leftrightarrow x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

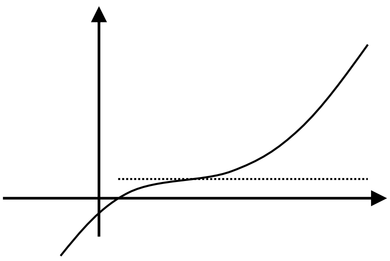
<u>Allg. : Berechnung von x_n :</u>

Steigung der Tangente in $P_{n-1} = (x_{n-1} / f(x_{n-1}))$

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \quad \text{allg. Iterationsvorschrift } n = 1,2,3,...$$

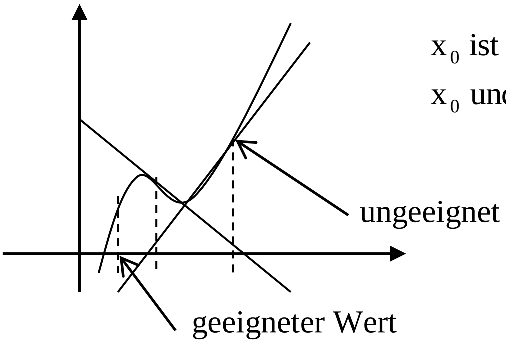
<u>Bestimmung eines geeigneten Startwertes</u>

a.)



Falls Tangente fast parallel zur x - Achse, d.h. $f'(x) \approx 0$ dann ist x_0 ungeeignet .

b.)



x_0 ist ungeeignet da zwischen x_0 und ξ ein Extremwert liegt.

Bestimmung eines geeigneten Startwertes erfolgt z.B. durch Anfertigung einer Funktionsskizze.

Zusammenfassung

Sei f(x) differenzierbar. Gesucht ist eine Lösung ξ der Gleichung f(x)=0.

Mit der Iterationsvorschrift $x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$

$n = 1,2,3,...$ wird ausgehend vom Startwert x_0 eine Folge von Näherungswerten $x_1, x_2, x_3, ...$ errechnet.

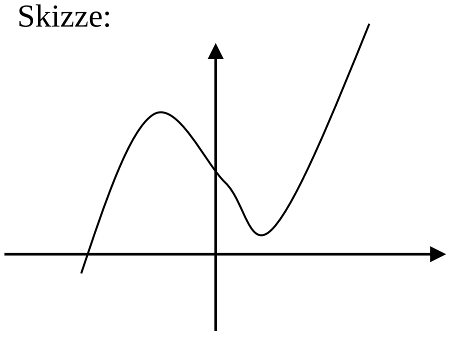
Konvergenzkriterium: Falls für alle x_i $(i = 1,2,3,...)$ gilt

$\left|\frac{f(x_i) \cdot f''(x_i)}{[f'(x_i)]^2}\right| < 1$ konvergiert die Folge $\{x_i\}$ gegen den gesuchten Wert.

Bsp.:

$$f(x) = x^3 - x + 1$$
$$f'(x) = 3x^2 - 1$$
$$f''(x) = 6x$$

Bestimmung eines Startwertes:
Skizze:



$f'(x) = 0 \qquad 3x^2 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{3}$

$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$

Wähle $x_0 = -1$

da $\left|\frac{f(-1)\cdot f''(-1)}{[f'(-1)]^2}\right| = \left|\frac{1\cdot 2}{36}\right| < 1$ ist geeigneter Startwert.

Zwischen $x_0 = -1$ und der gesuchten Nullstelle liegt kein weiterer Extremwert $\Rightarrow$ Das Tangentenverfahren von Newton konvergiert.

Berechnung der Näherungswerte

n	x_{n-1}	$f(x_{n-1})$	$f'(x_{n-1})$
1	-1	1	2
2	-1,5	-0,875	5,75
3	-1,35	-0,11	4,4675
4	-1,325	0,0012	