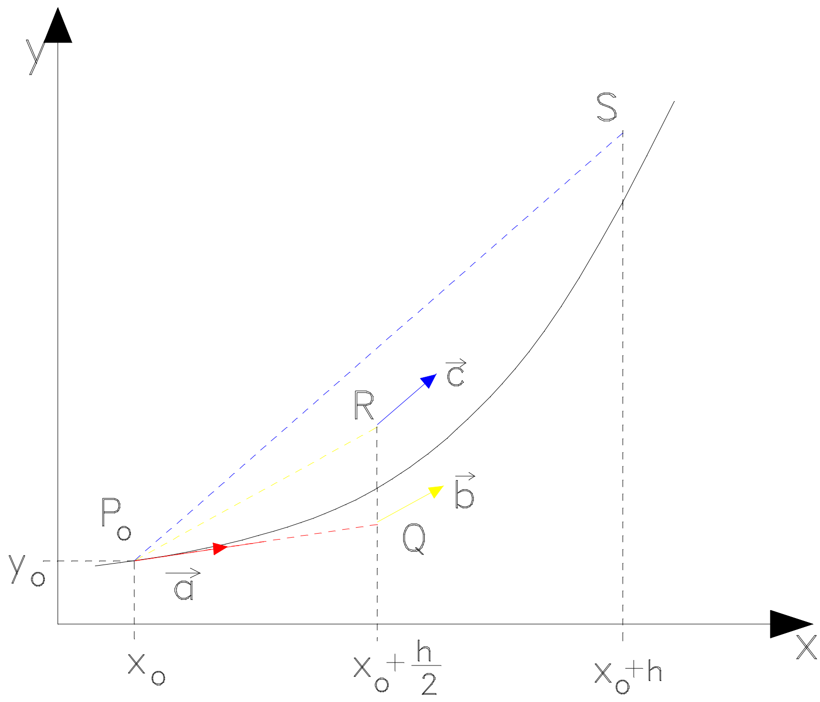
Geometrische Veranschaulichung

Prinzip:

mit der zuletzt bestimmten Steigung wird die neue Steigung berechnet,

d.h. 1. $\vec{a}$ 2. mit $\vec{a}$ $\vec{b}$ 3. mit $\vec{b}$ $\vec{c}$ 4. mit $\vec{c}$ $\vec{d}$



$\vec{c} \neq \vec{b}$ da die y - Werte von $\vec{c} \neq \vec{b}$ und die Funktion f(x,y) ist

Start:

$m_1 = f(x_0, y_0)$ ist Steigung im Startpunkt P0 (Richtungselement $\vec{a}$)

Mitte:

$m_2 = f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}\right)$ ist Steigung in Q (Richtungselement $\vec{b}$)

da $y_Q = y_0 + \frac{1}{2} h \cdot f(x_0, y_0) = y_0 + \frac{k_1}{2}$

$m_{'3} = f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}\right)$ ist Steigung in R (Richtungselement $\vec{c}$)

da $$y_R = y_0 + \frac{1}{2} h \cdot \underbrace{f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}\right)}_{\text{parallel zu } \vec{b}} = y_0 + \frac{k_2}{2}$$

d.h. von P0 in Richtung $\vec{b}$ auf die Intervallmitte zu

Endpunkt:

$m_4 = f(x_0 + h, y_0 + k_3)$ ist Steigung in S (Richtungselement $\vec{d}$)

von P_G in Richtung $\vec{c}$ zum Intervallende S

$$y_s = y_0 + h \cdot f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}\right) = y_0 + k_3$$

Insgesamt erhalten wir für “gemittelte“ Steigung :

$$m = \frac{m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4}{6}$$

13.3 Dgl. 1.Ordnung

13.3.1 Trennung der Variablen

Gegeben sei Dgl. der Form $y' = f(x) \cdot g(y)$

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y) \qquad / \cdot dx$$
$$dy = f(x) \cdot g(y)\ dx \quad / : g(y) \text{ falls} \neq 0$$
$$\frac{1}{g(y)} dy = f(x)\ dx$$

Variablen x und y sind getrennt

Intergation:

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x)\ dx$$

anschließend Auflösen nach y liefert die Lösung der Dgl. in expliziter Form

Bsp(1):

$x + y \cdot y' = 0$ Dgl. 1.Ordnung in impliziter Form

$y(0) = 2$ Anfangswert

Trennung der Variablen:

$$x + y\frac{dy}{dx} = 0$$
$$y\ dy = -x\ dx$$

Integration:

$$\int y\;dy = -\int x\;dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}y^2 + C_1 = -\frac{1}{2}x^2 + C_2$$

$$\frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + C$$

$$y^2 = -x^2 + 2C$$

Die allgemeine Lösung in impliziter Form: $y^2 + x^2 = 2C$ (Kreis)

Die spezielle Lösung für y(0) = 2 :

$$2^2 + 0^2 = 2C$$

$$\Rightarrow \quad C = 2$$

$$y^2 + x^2 = 4$$

Die spezielle Lösung ergibt einen Kreis mit dem Radius 2.

Bsp(2):

$$y' = y$$

$$\frac{dy}{dx} = y \Rightarrow dx = \frac{dy}{y}$$ (falls $y \neq 0$ d.h. Fall $y = 0$ ist separat zu untersuchen)

$$\int dx = \int \frac{dy}{d}$$

$$x + C_1 = \ln|y| + C_2$$

$$\ln|y| = x + C$$

$$e^{\ln|y|} = e^{x+C}$$

$$y = \pm e^C \cdot e^x$$

$$y = K \cdot e^x$$

mit $K = \pm e^C$ $K \in R \setminus \{0\}$

Untersuchung von $y = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d0}{dx} = 0 = y'$$

d.h. auch $y(0) \equiv 0$ (Abbildung auf der x-Achse) erfüllt die Dgl.

Insgesamt erhalten wir:

$$y = K_1 \cdot e^x \qquad \text{mit} \quad K_1 \in R$$

als allgemeine Lösung der Dgl. y = y’

13.3.2 Intergation einer Dgl. durch Substituion

Gegeben sei eine Dgl. 1.Ordnung der Form $y' = f(x, y)$, wobei auf den ersten Blick das Verfahren der Trennung der Variablen nicht anwendbar erscheint. Aber durch Wahl einer geeigneten Substitution ist das Verfahren der Trennung der Variablen anwendbar.

Bsp(1):

$$y' = 2x - y$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x - y$$

$$\underbrace{dy = (2x - y)dx}_{\text{falscher Ansatz}}$$

Substitution:

$$u = 2x - y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = u \qquad \text{nun 3 Variablen}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(2x - u)}{dx} = \frac{d\,2x}{dx} - \frac{du}{dx} = 2 - \frac{du}{dx}$$

$$\Rightarrow 2 - \frac{du}{dx} = u$$

$$\Rightarrow 2 - u = \frac{du}{dx}$$

$$(2 - u)dx = du$$

$$dx = \frac{du}{2 - u} \qquad \text{für } 2 - u \neq 0$$

$$\int dx = \int \frac{du}{2 - u} = -\int \frac{du}{u - 2}$$

$$-x = \ln|u - 2| + C$$

$$e^{-x} = e^{\ln|u-2|} \cdot \underbrace{e^{C}}_{C_1}$$

$$e^{-x} = |u - 2| \cdot C_1$$

$$C_2 \cdot e^{-x} = |u - 2|$$

$$\text{1. Fall } C_2\, e^{-x} = +(u - 2)$$

$$\text{2. Fall } C_2\, e^{-x} = -(u - 2)$$

$$\Leftrightarrow -C_2\, e^{-x} = (u - 2)$$

$$\Rightarrow C \cdot e^{-x} = u - 2 \qquad C \in R$$

Rücksubstitution:

$$u - 2 = (2x - y) - 2 = C \cdot e^{-x}$$

$$\Rightarrow y(x) = K \cdot e^{-x} + 2x - 2$$

Bsp(2):

Gegeben sei Dgl. 1.Ordnung der Form $y' = f(ax + by + c)$

Wähle Substitution:

$$u = ax + by + c$$
$$\Rightarrow \frac{du}{dx} = a + by'$$

mit $y' = f(u)$ erhalten wir:

$$u' = a + b \cdot f(u)$$
$$\frac{du}{dx} = a + b \cdot f(u)$$
$$du = (a + b \cdot f(u))dx$$
$$\Rightarrow \frac{du}{a + b \cdot f(u)} = dx$$

d.h. Lösung kann mit dem Verfahren der Trennung der Variablen bestimmt werden.

Bsp(3):

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \qquad f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{x + 2y}{x}$$

wähle

$$u = \frac{y}{x} \Rightarrow y' = f(u) \qquad y = ux$$
$$y' = \frac{d(ux)}{dx} = u'x + u$$

Somit

$$u'x + u = f(u)$$
$$\frac{du}{dx}x = f(u) - u \qquad / \cdot \frac{dx}{x}$$
$$du = (f(u) - u)\frac{dx}{x} \qquad / : (f(u) - u)$$
$$\Rightarrow \frac{du}{(f(u) - u)} = \frac{dx}{x}$$

Lösung durch Trennung der Variablen

Zusammenfassung:

Dgl. 1.Ordnung von Typ

a) $y' = f(ax+by+c)$ lassen sich durch Substitution $u = ax+by+c$

b) $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ lassen sich durch Substitution $u = \frac{y}{x}$

wie folgt lösen:

1. Substitution
2. Lösen der substituierten Dgl. in den Variablen x und u mit dem Verfahren der Trennung der Variablen
3. Rücksubstitution

Anmerkung:

Bei der Bestimmung der allgemeinen Lösung sind insbesondere Fälle der Division durch Null zu beachten.

13.3.3 Lineare Dgl. 1.Ordnung

bisher:

$$y' = f(x)\cdot g(y)$$

Sonderfälle:

$$y' = f(ax+by+c)$$

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Definition:

Eine Dgl. 1.Ordnung heißt linear, falls sie von der Form $y' + f(x)\cdot y = s(x)$ ist.

s(x) heißt Störfunktion

Falls s(x) = 0 , dann heißt die obige Dgl. homogen, ansonsten inhomogen.

1) Untersuchung der homogenen Dgl.

$$y' + f(x)\cdot y = 0$$

$$\Rightarrow y' = -f(x)\cdot y$$

$$\frac{dy}{dx} = -y\cdot f(x)$$

d.h. Lösung mit dem Verfahren der Trennung der Variablen

2) Untersuchen der inhomogenen Dgl.

Lösungsmethoden:

1. Variation der Konstanten
2. Suchen einer partikulären (speziellen) Lösung

13.3.3.1 Variation der Konstanten

Gesucht wird die Lösung der Dgl. $y' + f(x) \cdot y = s(x)$

Zunächst: Lösen der homogenen Dgl.:

$$
\begin{aligned}
&y' + f(x) \cdot y = 0 \\
&y' = -y \cdot f(x) \\
&\frac{dy}{dx} = -y \cdot f(x) \\
&\frac{dy}{y} = -f(x)dx \\
&\int \frac{dy}{y} = -\int f(x)dx \\
&\ln|y| + C = -\int f(x)dx \\
&e^{\ln|y|} = e^{-\int f(x)dx - C} \\
&|y| = e^{-\int f(x)dx} \cdot e^{-C} \\
&y \geq 0 \quad \Rightarrow \quad y(x) = e^{-C} \cdot e^{-\int f(x)dx} \quad C \in R \Rightarrow e^{C} \in R^{+} \setminus \{0\} \\
&y < 0 \quad \Rightarrow \quad -y(x) = e^{-C} \cdot e^{-\int f(x)dx} \\
&\qquad\qquad\qquad y(x) = -e^{-C} \cdot e^{-\int f(x)dx} \\
&\Rightarrow y(x) = K \cdot e^{-\int f(x)dx} \qquad K \in R \setminus \{0\}
\end{aligned}
$$

mit y = 0 ist auch K = 0 erlaubt $\Rightarrow K \in R$

inhomogene Dgl. $y' + f(x) \cdot y = s(x) \qquad (1)$

Idee (Lagrange) : Integrationskonstante K wird durch Funktion K(x) ersetzt.
Differentiation y(x)erfolgt mit Produktregel ($\rightarrow$ Summe, wobei S(x) entstehen soll)

Ansatz für inhomogene Dgl.

$$
\begin{aligned}
y(x) &= K(x) \cdot e^{-\int f(x)\,dx} \\
y' = \frac{dy}{dx} &= \left(K(x) \cdot e^{-\int f(x)\,dx} \right)' \\
&= K'(x) \cdot e^{-\int f(x)\,dx} + K(x) \cdot e^{-\int f(x)\,dx} \cdot (-f(x))
\end{aligned}
$$

Einsetzen in (1) liefert:

$$\underbrace{K'(x)\cdot e^{-\int f(x)dx} - f(x)\cdot K(x)\cdot e^{-\int f(x)dx}}_{y'} + \underbrace{f(x)\cdot K(x)\cdot e^{-\int f(x)dx}}_{f(x)\cdot y} = s(x)$$

$$\Rightarrow K'(x)\cdot e^{-\int f(x)dx} = s(x) \qquad K(x) = ?$$

$$K'(x) = s(x)\cdot e^{\int f(x)dx}$$

$$K(x) = \int s(x)\cdot e^{\int f(x)dx}dx + C$$

Einsetzen in Ansatz

für y(x):

$$y(x) = \left(\int S(x)\cdot e^{\int f(x)dx}dx + C\right)\cdot e^{-\int f(x)dx}$$

ist allgemeine Lösung der inhomogenen Dgl. (1)

<u>Zusammenfassung</u>:

Eine inhomogene Dgl. 1.Ordnung vom Typ $y' + f(x)\cdot y = s(x)$ läßt sich durch Variation der Konstanten wie folgt lösen:

1. Intergation der homogenen Dgl. $y_0(x) = K\cdot e^{-\int f(x)dx}$
2. Variation der Konstanten K -> K(x)

   Ansatz: $y(x) = K(x)\cdot e^{-\int f(x)dx}$

   Einsetzen in inhomogene Dgl. liefert Dgl. 1.Ordnung für K(x), die durch Integration gelöst werden kann.

Anm.: Allg. Lösung der inhom. Dgl = Allg. Lösung der hom. Dgl. + spezielle Lösung der inhom. Dgl.

Bsp: Variation der Konstanten

$$y' + \frac{y}{x} = \sin x \quad \Leftrightarrow \quad y' + \frac{1}{x}\cdot y = \sin x$$

d.h. Einsetzen von f(x) und s(x) in allgemeine Lösungsformel und berechnen der Integrale ergibt die Lösung.

Wir wiederholen das Verfahren zur Bestimmung der allgemeinen Lösung am Beispiel:

1. Lösen der homogenen Dgl. $y' + \frac{y}{x} = 0$

2. Variation der Konstanten

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \qquad y \neq 0$$

Integration

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \mathbf{ln}|y| = -\mathbf{ln}|x| + C$$

$$e^{\mathbf{ln}|y|} = e^{-\mathbf{ln}|x|+C}$$

$$= e^{-\mathbf{ln}|x|} \cdot e^{C}$$

$$|y| = \frac{1}{|x|} \cdot k \qquad k \in R^{+} \setminus \{0\}$$

Fallunterscheidung:

$$|a| = \begin{cases} a \text{ für } a \geq 0 \\ -a \text{ für } a < 0 \end{cases}$$

$$y \geq 0 : y = k \cdot \frac{1}{|x|} \qquad \left.\begin{array}{l} x > 0 \Rightarrow y = k\frac{1}{x} \\ x < 0 \Rightarrow y = -k\frac{1}{x} \end{array}\right\} \; y = k_1 \cdot \frac{1}{x} \quad k_1 \neq 0$$

$$y < 0 : y = -k \cdot \frac{1}{|x|} \qquad \left.\begin{array}{l} x > 0 \Rightarrow y = -k\frac{1}{x} \\ x < 0 \Rightarrow y = -k\frac{1}{-x} \end{array}\right\} \; y = k_1 \cdot \frac{1}{x} \quad k_1 \neq 0$$

$$y = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad y = k_1 \cdot \frac{1}{x} \qquad k \in R$$

allgemeine Lösung der homogenen Dgl.

Variation der Konstanten K = K(x)

Ansatz:

$$y(x) = \frac{K(x)}{x} \quad \Rightarrow \quad y'(x) = \frac{K'(x)\cdot x - K(x)\cdot 1}{x^2}$$

inhomogene Dgl.

$$y' + \frac{y}{x} = \mathbf{sin}\, x$$

einsetzen ergibt:

$$\frac{K'(x)\cdot x - K(x)\cdot 1}{x^2} + \frac{K(x)}{x}\cdot\frac{1}{x} = \sin x$$

$$\frac{K'(x)\cdot x}{x^2} = \sin x \Leftrightarrow \frac{K'(x)}{x} = \sin x \Leftrightarrow$$

$$K'(x) = x\cdot\sin x \quad \Leftrightarrow \quad dK(x) = x\cdot\sin x\, dx$$

Integration:

$$K(x) = \int x\cdot\sin x\; dx + C \;= x\cdot(-\cos x) - \int 1\cdot(-\cos x)dx + C$$

partielle Integration:

$$K(x) = \mathbf{sin}\, x - x\cdot\mathbf{cos}\, x + C$$

Insgesamt:

$$y(x) = \frac{\mathbf{sin}\, x - x\cdot\mathbf{cos}\, x + C}{x} = \frac{\mathbf{sin}\, x + C}{x} - \mathbf{cos}\, x \qquad C \in R$$

Zusammenfassung: **<u>Dgl 1. Ordnung</u>**

- Trennung der Variablen $y' = f(x)\cdot g(y)$
- Substitution $y' = f(x, y)$

Bsp.

$$y' = f(ax + by + c) \qquad u = ax + by + c$$

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \qquad u = \frac{y}{x}$$

- lineare Dgl 1. Ordnung $y' + f(x) \cdot y = s(x)$ (inhomogen)

  $y' + f(x) \cdot y = 0$ (homogen)

- Variation der Konstanten $y(x) = \underbrace{\left(\int S(x) \cdot e^{\int f(x)dx} \, dx \right) \cdot e^{-\int f(x)dx}}_{\text{Lösung der inhomogenen Dgl}} + \underbrace{C \cdot e^{-\int f(x)dx}}_{\text{allgemeine Lösung der homogenen Dgl}}$

13.3.3.2 Suchen einer partikulären Lösung

Gegeben sei eine inhomogene Dgl 1. Ordnung $y' + f(x) \cdot y = s(x)$

$y_0 = y_0(x)$ sei Lösung der homogenen Dgl $y' + f(x) \cdot y = 0$ und $y_p(x)$ sei eine beliebige, aber spezielle Lösung der inhomogenen Dgl

=>

Allgemeine Lösung der inhomogenen Dgl $y(x) = y_0(x) + y_p(x)$

Beweis:
zu zeigen: **1.** y(x) erfüllt die inhomogene Dgl

$$
\begin{aligned}
y' + f(x) \cdot y(x) &= \left(y_0(x) + y_p(x)\right)' + f(x) \cdot \left(y_0(x) + y_p(x)\right) \\
&= y_0{}'(x) + y_p{}'(x) + f(x) \cdot y_0(x) + f(x) \cdot y_p(x) \\
&= y_0{}'(x) + f(x) \cdot y_0(x) \quad + \quad y_p{}'(x) + f(x) \cdot y_p(x) \\
&= \qquad 0 \qquad\qquad + \qquad s(x) \\
&= s(x)
\end{aligned}
$$

zu zeigen: **2.** jede Lösung der inhomogenen Dgl ist von der Form $y_0(x) + y_p(x)$

Sei $\tilde{y}(x)$ beliebige Lösung der inhomogenen Dgl

d.h. $\tilde{y}' + f(x) \cdot \tilde{y}(x) = s(x) \qquad (1)$

Beachte spezielle Lösung $y_p(x)$

$$s(x) = y_p{}'(x) + f(x) \cdot y_p(x)$$

einsetzen in (1):

$$\tilde{y}' + f(x)\cdot\tilde{y}(x) = y_p{}'(x) + f(x)\cdot y_p(x)$$
$$\tilde{y}' + f(x)\cdot\tilde{y}(x) - y_p{}'(x) - f(x)\cdot y_p(x) = 0$$
$$\tilde{y}' - y_p{}'(x) + f(x)\cdot\left(\tilde{y}(x) - y_p(x)\right) = 0$$

d.h.

$\tilde{y}(x) - y_p(x)$ ist Lösung der homogenen Dgl und somit von der Form $y_0(x)$

$$y_0(x) = \tilde{y}(x) - y_p(x)$$
$$\tilde{y}(x) = y_p(x) + y_0(x)$$

Anwendung:

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Dgl $y'(x) + f(x)\cdot y(x) = s(x)$ kann wie folgt bestimmt werden:

1) Bestimmung einer beliebigen, aber speziellen Lösung der inhomogenen Dgl
2) Die allgemeine Lösung der homogenen Dgl bestimmen
3) Die Addition der beiden Lösungen aus 1) und 2) ergibt die allgemeine Lösung der inhomogenen Dgl

Bsp(1):

Gesucht ist die allgemeine Lösung der Dgl $y' + \frac{y}{x} = x^2$

Verfahren:

1) Bestimmung einer partikulären Lösung

Ansatz: $y_p(x) = ax^3$ $\quad y_p{}'(x) = 3ax^2$

Einsetzen in Dgl

$$3ax^2 + \frac{ax^3}{x} = x^2$$
$$3ax^2 + ax^2 = x^2$$
$$4ax^2 = x^2$$
$$4a = 1$$
$$a = \frac{1}{4}$$

Es wird ax^3 gewählt, da auf der rechten Seite der Gleichung x^2 vorhanden ist und somit auch auf der linken Seite der Gleichung x^2 erwünscht ist.
Abl von ax^3 ergibt x^2
$\frac{ax^3}{x}$ ergibt x^2

Partikuläre Lösung $y_p(x) = \frac{1}{4}x^3$

2. Lösung der homogenen Dgl $\quad y' + \frac{y}{x} = 0$

$$y_0(x) = \frac{C}{x} \qquad C \in R$$

(siehe Bsp Variation der Konstanten Seite 68)

Gesamt:

Allgemeine Lösung der inhomogenen Dgl

$$y(x) = \frac{C}{x} + \frac{1}{4}x^3 \quad \text{mit } C \in R$$

Bsp(2):

Gesucht ist allg. Lösung der Dgl. $y' + \frac{y}{x} = \sin x$ sowie spez. Lsg.mit y(π)=2

1. Partikuläre Lösung $\quad y(x) = \frac{\sin x}{x} - \cos x$

<u>Probe :</u> $\quad y'(x) = \frac{x \cdot \cos x - \sin x}{x^2} - (-\sin x)$

einsetzen : $\quad \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2} + \sin x + \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x} = \sin x$

2. Lsg. der hom. Dgl.

$$y' + \frac{y}{x} = 0 \quad \text{ist} \quad y_0(x) = \frac{C}{x}$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = \frac{\sin x}{x} - \cos x + \frac{C}{x} = \frac{\sin x + C}{x} - \cos x \qquad C \in R$$

spez. Lsg. : y(π) = 2 d.h. konstante C ist zu bestimmen

$$y(\pi) = \frac{\sin \pi}{\pi} - \cos \pi + \frac{C}{\pi} = \frac{0}{\pi} - (-1) + \frac{C}{\pi} = 1 + \frac{C}{\pi}$$

$$1 + \frac{C}{\pi} = 2 \Leftrightarrow \frac{C}{\pi} \Leftrightarrow \boxed{C = \pi}$$

13.4 Dgl 2. Ordnung (mit konstanten Koeffizienten)

Allgemeine lineare Dgl 2. Ordnung

$$y'' + f_1(x) \cdot y' + f_0(x) \cdot y = s(x)$$

Definition:

Eine Dgl vom Typ $y'' + ay' + by = s(x)$ heißt lineare Dgl 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten (a und b). Störfunktion s(x). Falls $S(x) \equiv 0$ ist die Dgl 2. Ordnung homogen.

13.4.1 homogene Dgl 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y'' + ay' + by = 0 \qquad (1)$$

Satz:

Sei $y_1(x)$ und $y_2(x)$ Lösung, dann ist auch $y(x) = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x)$ Lösung der Dgl

Beweis durch Einsetzen.

Problemstellung: Bestimmung der allgemeinen Lösung von (1)

Struktur der Lösung:

1. Dgl 1. Ordnung $y' + ay = 0$
   Die Integration liefert einen frei wählbaren Parameter C_1

2. Dgl 2. Ordnung $y'' + ay' + by = 0$
   Zweimalige Integration liefert zwei frei wählbare Parameter C_1 und C_2

Daraus folgt:

Falls $y_1(x)$ und $y_2(x)$ Lösung von (1) ist, dann ist

$y(x) = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x)$ allgemeine Lösung von (1)

(da C_1 und C_2 zwei frei wählbare Parameter und falls $y(x)$ nicht in der Form

$y(x) = C_3 \cdot y_3(x)$ darstellbar ist.)

d.h.

C_1 und C_2 dürfen nicht zusammengefaßt werden können.

Bestimmung von Funktionen $y_1(x)$ und $y_2(x)$ zur Lösung von $y'' + ay' + by = 0$
(homogene Dgl)

Lösungsidee: Verwendung einer Fkt. deren Ableitung = Konstante · Funktion

$$y(x) = e^{kx}$$
$$y'(x) = k \cdot e^{kx}$$
$$y''(x) = k^2 \cdot e^{kx}$$

Durch Einsetzen erhält man:

$$k^2 \cdot e^{kx} + ak \cdot e^{kx} + b \cdot e^{kx} = 0$$

(charakteristische Gleichung)

$$k^2 + ak + b = 0$$
$$k_{1/2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$$

Fallunterscheidung:

1. Fall:

$$\frac{a^2}{4} - b = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 = k_2 = -\frac{a}{2}$$
$$\Rightarrow a = -2k$$
$$b = \frac{a^2}{4} = k$$
$$\Rightarrow y_1(x) = e^{kx} \text{ und}$$
$$y_2(x) = x \cdot e^{kx}$$

Die zweite Lösung läßt sich durch Einsetzen beweisen.

Somit erhalten wir als allgemeine Lösung: $\boxed{y(x) = C_1 \cdot e^{kx} + C_2 \cdot x \cdot e^{kx}}$

2. Fall:

$$\frac{a^2}{4} - b > 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 \neq k_2$$
$$\Rightarrow y_1(x) = e^{k_1 x}$$
$$y_2(x) = e^{k_2 x}$$

Somit erhalten wir als allgemeine Lösung: $\boxed{y(x) = C_1 \cdot e^{k_1 x} + C_2 \cdot e^{k_2 x}}$

3.Fall

$$\frac{a^2}{4} - b < 0 \qquad \Rightarrow \qquad \sqrt{\frac{a^2}{4} - b} = j \cdot \omega \quad \omega \in R \;\; \text{und } j = \sqrt{-1}$$

$$k_{1/2} = -\frac{a}{2} \pm j \cdot \omega \qquad \text{(komplexe Lösung)}$$

$$y_{1/2}(x) = e^{k_{1/2}x} = e^{\left(-\frac{a}{2} \pm j \cdot \omega\right) \cdot x}$$

$$= e^{-\frac{a}{2}} \cdot e^{\pm j \cdot \omega x}$$

$$= e^{-\frac{a}{2}x} \cdot e^{j \cdot (\pm \omega x)} \quad (\text{Verwende: } e^{j\omega} = \cos\omega + j \; \sin\omega \;\; \text{Eulersche Formel})$$

$$= e^{-\frac{a}{2}x} \cdot \left(\cos(\pm\omega x) + j \cdot \sin(\pm\omega x)\right)$$

$$y(x) = \underbrace{e^{-\frac{a}{2}x} \cdot \cos(\omega x)}_{y_1(x)} \pm j \cdot \underbrace{e^{-\frac{a}{2}x} \cdot \sin(\omega x)}_{y_2(x)}$$

Realteil Imaginärteil

Somit erhalten wir als allgemeine Lösung:

$$\boxed{y(x) = C_1 \cdot e^{-\frac{a}{2}x} \cdot \mathbf{cos}(\omega x) + C_2 \cdot e^{-\frac{a}{2}x} \cdot \mathbf{sin}(\omega x)}$$

Anmerkung:

1) mit dem Lösungsansatz $y(x) = e^{kx}$ können auch Dgl höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten gelöst werden.

2) Mit obigem Ansatz haben wir die komplette und vollständige Lösung explizit bestimmt (<= einfaches Schema !)

Bsp(1):

$$y'' - 6y' + 9y = 0 \qquad a = -6$$
$$b = 9$$

$$k_{1/2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$$
$$= -\frac{-6}{2} \pm \sqrt{\frac{36}{4} - 9}$$
$$= 3 \pm 0$$

$$\Rightarrow y(x) = C_1 \cdot e^{3x} + C_2 \cdot x \cdot e^{3x}$$

Bsp(2):

$$y'' + 3y' - 4y = 0$$

$$k_{1/2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - (-4)}$$

$$= -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}}$$

$$= -\frac{3}{2} \pm \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow k_1 = 1$$

$$k_2 = -4$$

$$\Rightarrow y(x) = C_1 \cdot e^{x} + C_2 \cdot e^{-4x}$$

Bsp(3):

$$y'' + 4y' + 20y = 0$$

$$k_{1/2} = -\frac{4}{2} \pm \sqrt{\frac{16}{4} - 20}$$

$$= -2 \pm \sqrt{-16}$$

$$= -2 \pm 4j$$

$$\Rightarrow y(x) = C_1 \cdot e^{-2x} \,\mathbf{cos}\, 4x + C_2 \cdot e^{-2x} \,\mathbf{sin}\, 4x$$

13.4.2 Inhomogene Dgl 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

gegeben sei Dgl der Form $y'' + ay' + by = s(x)$
s(x) heißt Störfunktion

Die allgemeine Lösung ist von der Form $y(x) = y_0(x) + y_p(x)$, wobei $y_0(x)$ die allgemeine Lösung der homogenen Dgl, und $y_p(x)$ eine beliebige partikuläre Lösung der Dgl ist.

$y_0(x)$ ist bekannt (siehe 13.4.1), somit bleibt als Restproblem die Bestimmung von $y_p(x)$ in Abhängigkeit von s(x).

Lösungsansatz für $y_p(x)$ in Abhängigkeit von s(x)

I $s(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ \dots\ + a_1 x + a_0$

=> $y_p(x)$ ist Polynom vom Grad n falls $a_0 \neq 0$ und $b \neq 0$

$y_p(x)$ ist Polynom von Grad (n+1) falls $a_1 \neq 0$ und $a_0 = 0$

$y_p(x)$ ist Polynom vom Grad (n+2) falls $a_2 \neq 0$ und $a_1 = a_0 = 0$

II $s(x) = C_1 \cdot \cos\omega x + C_2 \cdot \sin\omega x$

$\Rightarrow y_p(x) = A \cdot \cos\omega x + B \cdot \sin\omega x$ (gilt auch für $C_1 = 0$ oder $C_2 = 0$

III $s(x) = C \cdot e^{kx}$

$\Rightarrow y_p(x) = A \cdot e^{kx}$ falls k nicht Lösung der charakteristischen Gleichung

$\Rightarrow y_p(x) = Ax \cdot e^{kx}$ falls k einfache Lösung der charakteristischen Gleichung

$\Rightarrow y_p(x) = Ax^2 \cdot e^{kx}$ falls k doppelte Lösung der charakteristischen Gleichung

IV $s(x)$ ist Summe aus I bis III

$\Rightarrow y_p(x) = \sum y_p(x)$ von I bis III (Superpositionsprinzip)

Verfahren:

1. Wählen eines Lösungsansatzes
2. Bestimmung der Variablen durch Koeffizientenvergleich zwischen der rechten und der linken Seite der Dgl, wobei der Lösungsansatz, bzw die entsprechenden Ableitungen eingesetzt werden müssen.

<u>Bsp. :</u> $y'' + 3y' - 4y = x + 1$

Lsg. der hom. Dgl.: $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-4x}$

part. Lsg. der inhom. Dgl.: $s(x) = x + 1$ (Polynom vom Grad 1 mit $a_0 = 1 \neq 0$)

Somit Ansatz :

$$y_p(x) = a_1 x + a_0$$
$$y_p'(x) = a_1$$
$$y_p''(x) = 0$$

Einsetzen :

$$0 + 3a_1 - 4(a_1 x + a_0) = x + 1$$

$$\Leftrightarrow \quad -4a_1 x + 3a_1 - 4a_0 = x + 1$$

$$\Rightarrow \quad -4a_1 = 1 \qquad \Rightarrow \quad a_1 = -\frac{1}{4}$$

$$3a_1 - 4a_0 = 1 \quad \Rightarrow \quad -\frac{3}{4} - 4a_0 = 1 \quad / + \frac{3}{4}$$

$$-4a_0 = \frac{7}{4} \qquad /: \; -4$$

$$a_0 = -\frac{7}{16}$$

Somit $\qquad y_p(x) = -\frac{1}{4}x - \frac{7}{16}$

Insgesamt erhalten wir als allg. Lsg der inhom. Dgl.

$$y(x) = \underbrace{c_1 e^{x} + c_2 e^{-4x}}_{y_0} \underbrace{- \frac{1}{4}x - \frac{7}{16}}_{y_p}$$