Bsp: $f(t) = t^2$

$$\left\{ F_n(x) = \int_n^x f(t)\,dt;\ n \in N \right\} \subset \left\{ \text{unbestimmte Integrale von } f(t) = t^2 \right\}$$

Sei $n < m$

$$F_n(x) - F_m(x) = \int_n^m f(t)\,dt + \int_m^x f(t)\,dt$$

$\uparrow$

Konstante

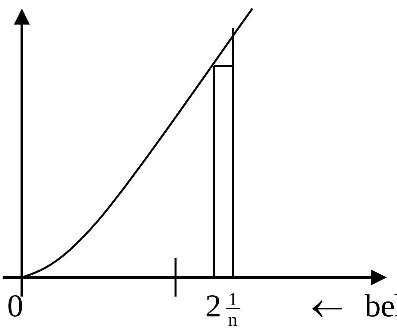
Zusammenhang zwischen Integration und Diff. am Bsp. der Parabel

$$f(t) = t^2 \quad F(x) = \int_a^x t^2\,dt = ?$$

Frage: Welcher Zusamenhang besteht zwischen der Fkt. F(x) und dem Integranden $f(t) = t^2$?

Exemplarische Herleitung des Hauptsatzes der D + I – Rechnung mit x = 2

Frage: Wie ändert sich das Integral, wenn man statt $\int_a^2 t^2\,dt$ $\int_a^{2+\frac{1}{n}} t^2\,dt$ betrachtet?



$\leftarrow$ bel. klein (d.h. $n \to \infty$)

$$\int_a^{x_n} t^2\,dt = \int_a^{2+\frac{1}{n}} t^2\,dt$$

$$x_n = 2 + \tfrac{1}{n}$$

Abschätzung:

$$\tfrac{1}{n} \cdot 2^2 = \tfrac{1}{n} * \textit{kleinster}\ \text{Fkt.-Wert} \le \text{Fläche exakt} \le \tfrac{1}{n} * \textit{größter}\ \text{Fkt.-Wert} = \tfrac{1}{n} \cdot \left(2 + \tfrac{1}{n}\right)^2$$

$$\int_a^{2+\frac{1}{n}} t^2 dt = \int_a^2 t^2 dt + \int_2^{2+\frac{1}{n}} t^2 dt$$

$$\Leftrightarrow \int_a^{2+\frac{1}{n}} t^2 dt - \int_a^2 t^2 dt = \int_2^{2+\frac{1}{n}} t^2 dt =$$

$$\tfrac{1}{n} 2^2 \le \int_a^{2+\frac{1}{n}} t^2 dt - \int_a^2 t^2 dt \le \tfrac{1}{n} \cdot \left(2 + \tfrac{1}{n}\right)^2 \qquad / \div \tfrac{1}{\text{n}}$$

$$2^2 \le \frac{\int_a^{2+\frac{1}{n}} t^2 dt - \int_a^2 t^2 dt}{\frac{1}{n}} \le \left(2 + \tfrac{1}{n}\right)^2$$

Betrachten wir den Grenzwert für $\frac{1}{\text{n}} \to 0$, d.h.

$$\underbrace{\lim_{\frac{1}{n}\to 0} f(2)}_{= \text{f}(2)} \le \underbrace{\lim_{\frac{1}{n}\to 0} \frac{F(2+\frac{1}{n}) + F(2)}{\frac{1}{n}}}_{= \text{F}'(2)} \le \underbrace{\lim_{\frac{1}{n}\to 0} f(2+\tfrac{1}{n})}_{= \text{f}(2)}$$

$$\Rightarrow \text{f}(2) \le \text{F}'(2) \le \text{f}(2) \quad \Rightarrow \text{F}'(2) = \text{f}(2)$$

Die Herleitung gilt allgemein für eine beliebige Obergrenze a :

$$\text{f(a)} \le \text{F}'(\text{a}) \le \text{f(a)} \Rightarrow \text{F}'(\text{a}) = \text{f(a)}$$

$$\text{f(a)} = \text{a}^2 \Rightarrow F'(a) = a^2$$

$$\Rightarrow \text{F(a)} = \frac{a^3}{3} + c$$

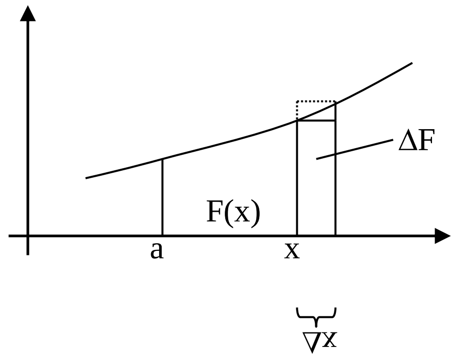
oder :

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c \quad \leftarrow \text{Stammfkt.}$$

6.1.4 Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung

Sei f(t) eine beliebige stetige Funktion.

Wir betrachten $\text{F(x)} = \int_{\text{a}}^{\text{x}} \text{f(t) dt}$ mit gewählter Untergrenze a



Abschätzung:

$$\underbrace{\Delta x \cdot \min_{t\in[x,x+\Delta x]} f(t)}_{\text{kleinstes Rechteck}} \le F(x+\Delta x)-F(x) \le \underbrace{\Delta x \cdot \max_{t\in[x,x+\Delta x]} f(t)}_{\text{größtes Rechteck}} \qquad /:\Delta x$$

$$\min f(t) \le \frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} \le \max f(t)$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$f(x) \le \underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}}_{=F'(x)} \le f(x)$$

$$\Rightarrow \underline{F'(x)=f(x)} \qquad \textit{mit } F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

$\Rightarrow$ $f(x)$ ist gegeben, d.h. gesucht ist eine Funktion deren Ableitung $f(x)$ ergibt

Fundamentalsatz der D+I Rechnung

Sei $F(x)=\int f(t)\,dt$ eine bel. Stammfunktion so gilt $F'(x)=f(x)$

Beispiele :

Gesucht ist die Stammfunktion F(x) zur Fkt. f(x), d.h. $\int f(x)dx = F(x)+c$

(Integrationsgrenzen können bei der Bestimmung einer Stammfunktion F(x) weggelassen werden)

(1) $\int (4x+3)dx = ?$

Gesucht: irgendeine Stammfunktion F(x) mit

$$F'(x) = 4x + 3$$

$$\uparrow \quad \uparrow$$

$$(2x^2)' \quad (3x)'$$

Somit ist $F(x) = 2x^2 + 3x$ eine Stammfunktion.

Menge aller Stammfkt. zur Fkt. $f(x) = 4x + 3$ ist $M_{St.}$:

$$M_{St.} = \left\{ 2x^2 + 3x + c \text{ mit } c \in R \text{ konstant} \right\}$$

$$F_c(x) = 2x^2 + 3x + c$$

$$\Rightarrow F_c'(x) = 4x + 3 + 0$$

(2) $\int e^x dx = ?$

$\uparrow$

$(e^x)'$ $\qquad$ $F(x) = e^x + c$

(3) $\int x^5 dx = ?$

$\uparrow$

$(\frac{1}{6}x^6)'$ $\qquad$ $F(x) = \frac{1}{6}x^6 + c$

(4) $\int x^n dx = ?$

$\uparrow$

$(\frac{1}{n+1}x^{n+1})'$ $\qquad$ $F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$

(5) $\int \cos x \, dx = ?$

$\uparrow$

$(\sin x)'$ $\qquad$ $F(x) = \sin x + c$

(6) $\int (e^x + x^7)\, dx = e^x + \frac{1}{8}x^8 + c$

(7) $\int 5x^4 - \cos x \, dx = 5 \cdot \frac{1}{5}x^5 - \sin x + c$

$$= x^5 - \sin x + c$$