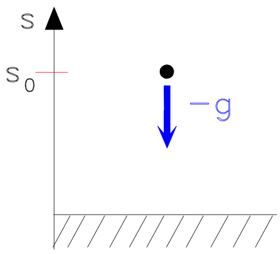
13 Differentialgleichungen

13.1 Grundlagen

Bsp:

freier Fall (ohne Reibung)



-g $\hat{=}$ Erdbeschleunigung
-g · m $\hat{=}$ Schwerkraft

Für den freien Fall gilt:

$$\ddot{s}(t) = -g$$

s(t) = Weg

d.h. der Körper der Masse m erfährt die Beschleunigung $\ddot{s}(t)$ durch die Erdbeschleunigung -g (nach unten)

bzw. die unbekannte Weg-Zeit Funktion s(t) wird durch obige Gleichung, die die zweite Ableitung von s(t) enthält, bestimmt.

Gegeben: $\ddot{s}(t) = -g$
Gesucht: $s(t) = \mathbf{?}$

Definition:

Eine Funktion, die Ableitungen der gesuchten unbekannten Funktion y = y(x) enthält, heißt **Differentialgleichung** (Dgl).

Eine Dgl heißt von n-ter Ordnung, falls die höchste auftretende Ableitung $y^{(n)}$ ist.

Wir befassen uns in diesem Kapitel mit Verfahren zur Bestimmung der unbekannten Funktion y(x) (y(x) ist Lösung, falls Gleichung erfüllt).

Anmerkung:

Partielle Dgl sind Dgl, die partielle Ableitungen enthalten.

Darstellungsformen:

Implizite Form

$$F\left(x, y, y', \dots, y^{(n)}\right) = 0$$

$$2x + y \cdot y' = 0 \qquad \text{(Dgl 1. Ordnung)}$$

$$3y^{(5)} + y' - \sin x = 0 \qquad \text{(Dgl 5. Ordnung)}$$

Explizite Form (Dgl muß nach der höchsten Ableitung aufgelöst sein)

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right)$$

$$y^{(7)} = y' \cdot y'' \qquad \text{(Dgl 7. Ordnung)}$$

Definition:

Eine Dgl heißt <u>linear</u>, wenn sie von der Form:

$$f_n(x)\cdot y^{(n)} + f_{n-1}(x)\cdot y^{(n-1)} + \ldots + f_1(x)\cdot y' + f_0(x)\cdot y = g(x)$$

ist.

Lösung der Dgl $\ddot{s}(t) = -g$

$$\ddot{s}(t) = \frac{\delta^2 s}{\delta t^2} = \frac{\delta}{\delta t}\underbrace{\left(\frac{\delta s}{\delta t}\right)}_{v(t)} = -g$$

Somit

$$\frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{\delta s}{\delta t}\right) = -g \qquad |\cdot \delta t$$

$$\delta v(t) = -g\cdot\delta t \qquad |\text{Integration}$$

$$\int \delta v(t) = -\int g\ \delta t \qquad |\text{Bestimmung der Stammfunktion}$$

$$v(t) = -gt + C_1$$

mit

$$v(t) = \frac{\delta s}{\delta t}$$

$$\Rightarrow \frac{\delta s}{\delta t} = -gt + C_1 \qquad |\cdot\delta t$$

$$\delta s = (-gt + C_1)\cdot\delta t$$

$$\int \delta s = \int(-gt + C_1)\cdot\delta t$$

$$s(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1 t + C_2$$

Dies ist die gesuchte Weg-Zeit Funktion.

<u>Probe:</u> Ableitungen bilden und Einsetzen

Bedeutung der Integrationsgrenzen C_1, C_2:

Startzeitpunkt: $t = 0$:

$$s(0) = -\frac{1}{2}g\cdot 0^2 + C_1\cdot 0 + C_2 = C_2$$

d.h. C_2 ist die Höhe zum Startzeitpunkt s_0

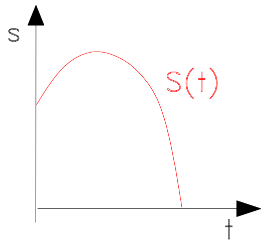
$$v(0) = \dot{s}(0) = -g \cdot 0 + C_1 = C_1$$

d.h. C_1 ist die Geschwindigkeit zum Startzeitpunkt v_0

Somit:

$$s(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t + s_0$$

Einsetzen von Werten für v_0 und s_0 ergibt die spezielle Lösung für die gewählten Anfangswerte (partikuläre Lösung)



Allgemein:

Die allgemeine Lösung einer Dgl n-ter Ordnung enthält n voneinander unabhängige Parameter (Integrationskonstanten). Hieraus gewinnt man eine spezielle (partikuläre) Lösung, indem man den n Parametern (aufgrund zusätzlicher Bedingungen z.B. Anfangsbedingungen oder Randbedingngen) feste Werte zuweist.

<u>**Geometrische Betrachtung (Dgl + Lösung)**</u>

Bsp:

$$y' = 2x$$

$$y' = \frac{\delta y}{\delta x} = 2x \qquad \Big| \cdot \delta x$$

$$\delta y = 2x \;\; \delta x$$

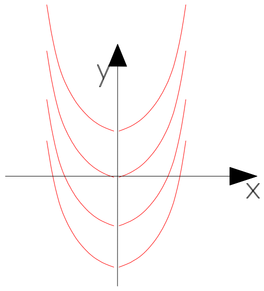
$$\int \delta y = \int 2x \;\; \delta x$$

$$y + C_1 = x^2 + C_2$$

$$y = x^2 + \underbrace{C_1 - C_2}_{C}$$

$$\Rightarrow y = x^2 + C$$

Graphische Darstellung:



$y = x^2 + C$ allgemeine Lösung der Dgl $y' = 2x$

Die allgemeine Lösung ergibt eine Parabelschar

In beliebigem Punkt x0 ist für alle Parabeln die Steigung $y'(x_0) = 2x_0$
- durch Wahl eines bestimmten Wertes für C ergibt sich die spezielle Lösung !

Gegeben sei Dgl 1. Ordnung in der expliziten Form $y' = f(x, y)$, wobei durch jeden Punkt $P(x_0 / y_0)$ genau eine Lösungskurve verlaufe.

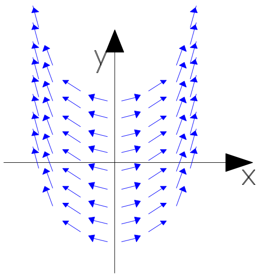
Wir betrachten $P(x_0 / y_0)$ und Lösung y = y(x)

Steigung $m = y'(x_0)$, bzw $m = f(x_0, y_0)$

d.h. jedem Punkt wird ein Richtungs- oder Steigungswert zugeordnet;
man sagt:

$$y' = f(x, y)$$

definiert ein Richtungsfeld; die graphische Darstellung erfolgt durch Richtungselemente (kleine Pfeile)

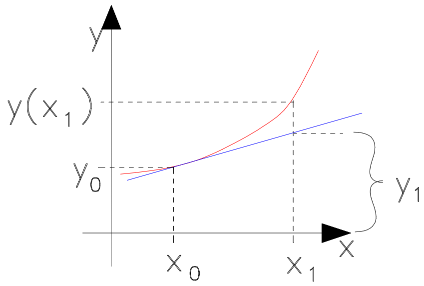


Bestimmung der Lösung:
Auf den Pfeilen ‘entlanggehen’

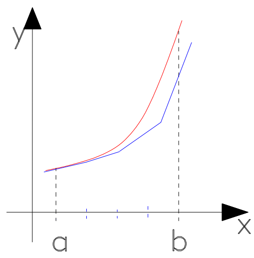
13.2 Näherungsverfahren

13.2.1 Euler - Cauchy Verfahren

Gesucht ist die Lösung der Dgl 1.Ordnung $y' = f(x,y)$ im Intervall [a,b] mit dem Anfangswert $y(x_0) = y_0$ mit $x_0 = a$:



Gegeben ist der Startpunkt (x_0, y_0) und das Richtungsfeld $f(x,y)$ (Steigungen)



Idee : Start im Punkt (x_0, y_0), gehe entlang eines Richtungselements zum Punkt (x_1, y_1), von dort entlang Richtungselement zu Punkt (x_2, y_2) usw, bis der Endpunkt $x_n = b$ erreicht ist.
$\Rightarrow$ Näherungskurve entsteht durch Zusammensetzen der jeweiligen Richtungselemente (Tangentenstücke)

Formale (programmierbare) Beschreibung des Verfahrens

$$y' = f(x,y) \text{ für } x \in [a,b] \qquad y(x_0) = y_0 \qquad y(b) = \textbf{?}$$

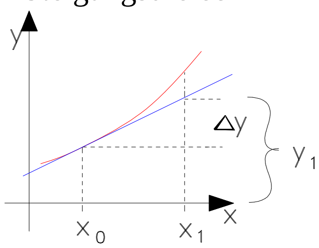
Teile [a,b] in n Teile der Länge $h = \dfrac{b-a}{n}$

$$x_0 = a \quad x_1 = a + 1 \cdot h \quad x_2 = a + 2 \cdot h \ \ldots \ x_n = a + n \cdot h = b$$

Formel: $x_i = a + i \cdot h \qquad i = 0,1, \ldots ,n$

Näherungswert y_i:
y_0 ist gegeben
y_1 wird gesucht

Steigungsdreieck



Tangentensteigung:

$$m = \frac{\Delta y_1}{x_1 - x_0} \Rightarrow \Delta y_1 = m(x_1 - x_0)$$

$$y_1 = y_0 + \Delta y_1 = y_0 + m(x_1 - x_0)$$

mit $m = f(x_0, y_0)$ da $y' = f(x, y)$

$$y_1 = y_0 + (x_1 - x_0) \cdot f(x_0, y_0)$$

analog:

$$y_2 = y_1 + (x_2 - x_1) \cdot f(x_1, y_1)$$

usw.

allgemein:

$$y_k = y_{k-1} + \underbrace{(x_k - x_{k-1})}_{=h} \cdot f(x_{k-1}, y_{k-1})$$

mit $h = x_k - x_{k-1}$ erhalten wir die allgemeine Formel.

Zusammenfassung:

Die Lösung y = y(x) der Dgl 1.Ordnung $y' = f(x, y)$ mit Anfangspunkt (x_0, y_0) läßt sich punktweise mit dem Verfahren von Euler - Cauchy wie folgt näherungsweise berechnen:

$$\boxed{y(x_k) \approx y_k = y_{k-1} + h \cdot f(x_{k-1}, y_{k-1}) \quad k = 1,2, \ldots ,n}$$

Streckenzug oder Polygonzugverfahren

Rechenschema

k	x	y	$h \cdot f(x, y)$
	x_0	y_0	$h \cdot f(x_0, y_0)$
1	$x_1 = x_0 + h$	$y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0)$	$h \cdot f(x_1, y_1)$
2	$x_2 = x_0 + 2 \cdot h$	$y_2 = y_1 + h \cdot f(x_1, y_1)$	$h \cdot f(x_2, y_2)$
:	:	:	:
n			

Fehlerabschätzung

$$\Delta y_k = y(x_k) - y_k$$
$$\approx y_k - \tilde{y}_k$$

mit y_k = Näherungswert an der Stelle x_k mit der Schrittweite h
$\tilde{y}_k$ = Näherungswert an der Stelle x_k mit der Schrittweite 2h (doppelt)

Bsp:

$y' = y + e^x \quad 0 \le x \le 0.2$

Anfangsbedingung: $y(0) = y_0 = 1$

Gesucht ist der Näherungswert y(0.2) = ?

Srittweite: h = 0.05

k	x	y	$h \cdot f(x, y)$
	0	1	0.1
1	0.05	1.1	0.1.7
2	0.1	1.207	0.115
3	0.15	1.323	0.124
4	0.2	1.447	

$y_{exakt} = 1.465$

Anmerkung:

Für die Praxis ist das Euler - Cauchy Verfahren nicht besonders gut geeignet !!

Programm zur Berechnung des obigen Beispiels

```
100     INPUT ''Startpunkt a : '';a
110     INPUT ''Endpunkt  b : '';b
120     INPUT ''Schrittzahl n : '';n
130     INPUT ''Anfangswert  : '';y0
140     h=(b-a)/n
150     xk=a
160     yvorh=y0
170     FOR i = 1 TO n
180     GOSUB 400
190     xk=a+1*h
200     y=yvorh+h*fwert
210     yvorh=y
220     PRINT ''xk = '';xk;''  y = '';y
230     NEXT i
240     PRINT ''Endwert : '';y
250     END

390     REM  Dgl y' = y + e hoch x
400     fwert=yvorh+EXP(xk)
410     RETURN
```

13.2.2 Runge - Kutta Verfahren

Euler - Cauchy Verfahren berücksichtigt nur die Steigung im linken Randpunkt des Intervalls $[x_i , x_{i+1}]$

Verbesserungsidee:

analog: $y = y_0 + (x - x_0) * m$

aber die Steigung m wird als geschickter Mittelwert der Steigung im
- linken Randpunkt
- rechten Randpunkt und
- in der Mitte des Teilintervalls berechnet

Runge - Kutta Verfahren

Die Lösung $y = y(x)$ der Dgl 1.Ordnung $y' = f(x)$ mit dem Anfangspunkt (x_0 , y_0) wird wie folgt berechnet:

$$y_i = y_{i-1} + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right) \qquad i = 1,2, ... ,n$$

wobei

h = Schrittweite

$$k_1 = h \cdot f\left(x_{i-1} \,,\, y_{i-1}\right)$$

$$k_2 = h \cdot f\left(x_{i-1} + \frac{h}{2} \,,\, y_{i-1} + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = h \cdot f\left(x_{i-1} + \frac{h}{2} \,,\, y_{i-1} + \frac{k_2}{2}\right)$$

$$k_4 = h \cdot f\left(x_{i-1} + h \,,\, y_{i-1} + k_3\right)$$

Anmerkung:

Dieses Verfahren von Runge - Kutta kann auch auf Dgl 2. Ordnung <u>übertragen</u> werden.
(Nicht die hier beschriebenen Gleichungen verwenden !!)

Runge - Kutte Verfahren ist sehr gut geeignet zum numerischen Lösen einer Dgl 1.Ordnung vom Typ $y' = f(x,y)$.