10. Funktionen mehrerer unabhängiger Variablen

10.1 Grundlagen

Bisher Funktionen einer Veränderlichen x mit y = f(x), wobei jedem Wert des Definitionsbereichs genau ein Wert des Wertebereichs zugeordnet ist.
Wir betrachten nun mehrere unabhängige Veränderliche. (Punkt im mehrdimensionalen Raum) Diesem Punkt ordnen wir nun genau einen Wert zu.

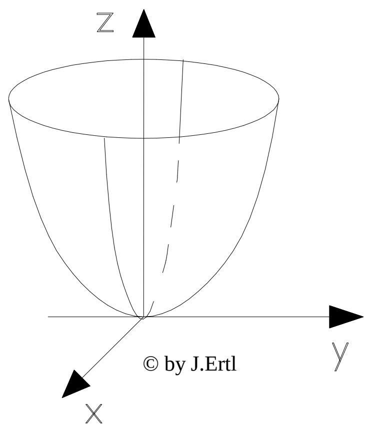
Bsp:

Zwei unabhängige Variablen x,y (Punkt in Ebene)

$$\text{Funktion: } f:(\mathrm{x},\mathrm{y}) \rightarrow f(x,y)$$

$$z = f(x,y)$$

$$f(x,y) = x^2 + y^2 \quad (\text{Kratersee})$$



Definitionsbereich ist die x-y- Ebene
Wertebereich ist R^+

Definition: Eine Funktion f:(x,y) -> f(x,y) = z von zwei unabhängigen Variablen x und y ist eine Abbildungsvorschrift, die jedem „Punktepaar" (x,y) aus dem Definitionsbereich genau einen Wert aus den Wertebereich zuordnet.

Eine Funktion $f:(x_1,x_2,x_3,...,x_n) \rightarrow f(x_1,x_2,x_3,...,x_n)$ von n unabhängigen Variablen ist eine Abbildungsvorschrift, die jedem „Punkt" $(x_1,x_2,x_3,...,x_n)$ aus dem Definitionsbereich genau einen Wert aus den Wertebereich zuordnet.

f(x,y) = z => „Landschaft"

Anmerkung: Die „Funktionslandschaft" darf keine senkrechten „Wände" und keine Überhänge haben, da dann einem Punkt mehrere Werte zugewiesen werden.

Darstellungsformen von Funktionen

Explizite Darstellung $z = f(x,y)$

Bsp: $z = x^2 + y^2$

Implizite Darstellung $F(x,y,z) = \text{const.}$

Bsp: $0 = x^2 + y^2 - z$

Darstellung mit Wertetabelle

x	y	z
1	1	1
2	2	4
3	3	9
0	3	9

$z = y^2 + 0x$

Stetigkeit:

Funktion einer Veränderlichen

Eine in x_0 und in einer Umgebung von x_0 definierte Funktion $f(x)$ heißt an der Stelle x_0 stetig, falls gilt:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Definition der Stetigkeit für zwei unabhängige Veränderliche:

Eine Funktion $z = f(x,y)$ heißt stetig im Punkt (x_0/y_0), falls $f(x,y)$ in einer Umgebung von (x_0/y_0) definiert ist und falls gilt:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = f(x_0, y_0)$$

Anmerkung:

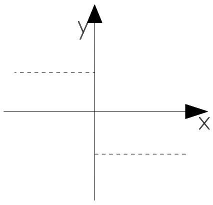
Definition der Stetigkeit für n unabhängige Variablen läuft analog!

In Worten:

Unabhängig davon, auf welchem Weg man sich dem Punkt (x_0/y_0) nähert, konvergiert die Folge der dazugehörigen Funktionswerte gegen den Funktionswert im Punkt (x_0/y_0).
In stetigen Funktionen dürfen keine Sprünge, Löcher oder Unendlichkeitsstellen auftreten.

Bsp(1): $z = x^2 + y^2$ ist stetig im genannten Definitionsbereich

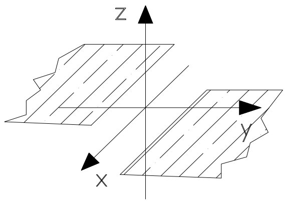
Bsp(2):



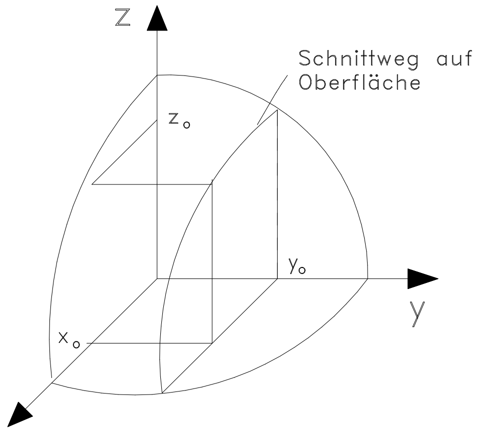
$f(x,y) = +1$ für $x \leq 0$

$ = -1$ für $x \geq 0$

ist unstetig in allen Punkten $(0/y_o)$



10.2 Partielle Ableitung



© by J.Ertl

f(x,y) beschreibt eine „Landschaft“

Frage:
Welche Steigung gilt entlang eines Weges, der durch ein beliebiges, aber festes y_o und ein veränderliches x definiert ist?
(In x-y- Ebene parallele zur x-Achse durch y_o)

Weg definiert durch $f(x,y_o)$ (Funktion der Veränderlichen x)

Punkt z_o des Weges durch $z_o = f(x_o,y_o)$
Steigung im Punkt z_o entlang des Weges $f(x,y_o)$ ist $f\,'(x,y_o)$ (d.h. Ableitung nach x)

Klar: Bei jedem anderen Weg ändert sich in der Regel die Steigung.

Definition:
Die <u>partielle Ableitung der Funktion</u> z = f(x,y) <u>nach der Veränderlichen x</u> im Punkt (x_o,y_o) ist die Steigung der Funktion $f(x,y_o)$ in x-Richtung.

Wir schreiben:

$$\frac{\delta f(x_0, y_0)}{\delta x} = \left.\frac{\delta f(x, y)}{\delta x}\right|_{(x_0,y_0)} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

lese: d f(x,y) partiell nach dx im Punkt (x_o,y_o)

Analog für y:

$$\frac{\delta f(x_0, y_0)}{\delta y} = \left.\frac{\delta f(x, y)}{\delta y}\right|_{(x_0,y_0)} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

<u>Gilt analog für n Veränderliche!</u>

Bsp(1): $f(x,y) = x^2 + y^2$ Gesucht df(x,y) nach dx im Punkt (2/4)

$$f(x, y_0) = f(x,4) = x^2 + 4^2 = x^2 + 16$$

$$\left.\frac{\delta f(x,y)}{\delta x}\right|_{(2,4)} = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h,4) - f(2,4)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^2 - (2^2 + 4^2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{4 + 4h + h^2 + 16 - 4 - 16}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{4h + h^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} (4 + h)$$

$$= 4$$

Bsp(2):

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

$$\left.\frac{\delta f(x,y)}{\delta x}\right|_{(x_0,y_0)} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x_0 + h)^2 + {y_0}^2 - {x_0}^2 - {y_0}^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x_0 + h)^2 - {x_0}^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{{x_0}^2 + 2x_0 h + h^2 - {x_0}^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} (2x_0 + h)$$

$$= \lim_{h\to 0} 2x_0$$

d.h. die Ableitung nach x ist $f'(x,y_0) = 2x$

Bsp(3): Gesucht ist die partielle Ableitung nach x und y der Funktion $f(x,y) = 5x^3 - xy + y^2$ an der Stelle (2,3)

$$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(2,3)} = 15x^2 - y$$

$$= 15 * 2^2 - 3 = 57$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(2,3)} = 0 - x + 2y$$

$$\underline{= 2 \cdot 3 - 2 = 4}$$

Zusammenfassung:

Gegeben sei die Funktion $f(x_1,x_2,...,x_n)$ die Bildung der partiellen Ableitung nach der Variablen x_i mit $i \in \{1,2,...,n\}$ entspricht der Bildung der Ableitung der Funktion $f(x_1,x_2,...,x_n)$ nach der Veränderlichen x_i. (d.h. im Prinzip Funktion einer Veränderlichen, wobei alle x_j mit $j \neq i$ als konstant (genauso wie Zahlen) angesehen werden.

Die Ableitungsregeln für eine Veränderliche (Produktregel, Quotientenregel und Kettenregel) können angewendet werden.

Bsp(1):

$$f(x,y) = 3x^2 \cdot \sin y + e^{xy}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x \cdot \sin y + y \cdot e^{xy} \qquad (\text{Produkt} - \textit{und} \quad \textit{Kettenregel})$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 \cdot \cos y + x \cdot e^{xy}$$

Bsp(2):

$$f(x,y,z) = \frac{x^2 + y^2}{xyz} \qquad (\textit{Quotientenregel})$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{(2x) \cdot xyz - yz \cdot (x^2 + y^2)}{x^2 y^2 z^2}$$

$$= \frac{2x^2 yz - x^2 yz - y^3 z}{x^2 y^2 z^2}$$

$$= \frac{yz(2x^2 - x^2 - y^2)}{x^2 y^2 z^2}$$

$$= \frac{x^2 - y^2}{x^2 yz}$$

$$= \frac{1}{yz} - \frac{y}{x^2 z}$$

Bsp(3):

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sin(x_1 x_2 x_3 x_4) \qquad (\textit{Kettenregel})$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = (\cos(x_1 x_2 x_3 x_4)) \cdot (x_1 x_3 x_4)$$

Ableitungen höherer Ordnung

Bsp:

$$f(x,y) = y^3 \cdot x^4$$

$$\frac{\delta^2 f(x,y)}{\delta^2 x} := \frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\delta f(x,y)}{\delta x}\right)$$

$$\frac{\delta^2 f}{\delta^2 x} = \frac{\delta(4x^3 \cdot y^3)}{\delta x} = 12x^2 \cdot y^3 = f_{xx}$$

Höhere Ableitungen können „gemischt" nach unterschiedlichen Variablen erfolgen!

Anm.: f_{xy} bedeutet zuerst Ableitung nach x und anschliessend Ableitung nach y!

$$\frac{\delta^2 f(x,y)}{\delta x \delta y} = \frac{\delta(3x^4 \cdot y^2)}{\delta x} = 12x^3 \cdot y^2 = f_{yx}$$

$$\frac{\delta^2 f(x,y)}{\delta y \delta x} = \frac{\delta(4x^3 \cdot y^3)}{\delta y} = 12x^3 \cdot y^2 = f_{xy}$$

Im Beispiel:

$$\boxed{f_{xy} = f_{yx}}$$

Ist das ein Zufall ?

Satz von Schwarz

Unter der Voraussetzung, daß die Funktion $f(x_1,x_2,...,x_n)$ und ihre partiellen Ableitungen stetig sind, ist die Reihenfolge der partiellen Differentiation beliebig.

d.h. Reihenfolge der Differentiation ändert das Ergebnis nicht.

Bsp: Die Funktio f(x,y) = $y^3 * x^4$ ist stetig und alle partiellen Ableitungen sind stetig

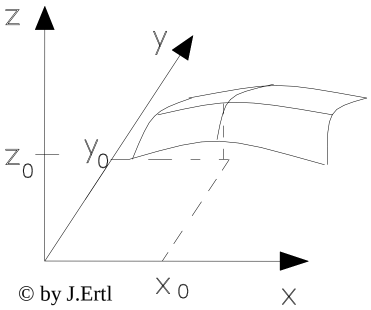
=> Reihenfolge spielt keine Rolle.

Bestimme f_{xy} *und* f_{yx}

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial(4y^3x^3)}{\partial y} = 12y^2x^3 = f_{yx}$$

10.3 Extremwerte

Wir betrachten die Funktion z = f(x,y) und untersuchen die Minima (Maxima) dieser Funktion (lokale)



lokales Maximum (höchster Punkt in diesem Bereich)

Liegt ein Maximum (Minimum) vor, so gilt (anschaulich):

I. $\frac{\delta f}{\delta x} = 0$ (Schnitt // zur x-Achse)

und $\frac{\delta f}{\delta y} = 0$ (Schnitt // zur y-Achse)

II_a $z_{xx} < 0$ und $z_{yy} < 0$ dann Maximum

II_b $z_{xx} > 0$ und $z_{yy} > 0$ dann Minimum

Frage:

Folgt aus der Gültigkeit von I und II_a bzw. II_b, daß ein Maximum oder Minimum vorliegt?

Antwort:

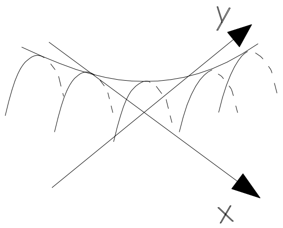
NEIN !

d. h. falls ein lokales Maximum (bzw. Minimum) vorliegt dann ist I und IIa (bzw. IIb) erfüllt.

Aber aus I und IIa (bzw. IIb) kann nicht auf ein lokales Maximum (bzw. Minimum) geschlossen werden.

Beweis: durch Gegenbeispiel!

Bsp: Sattelfläche, die von der x- und y-Achse schräg geschnitten wird



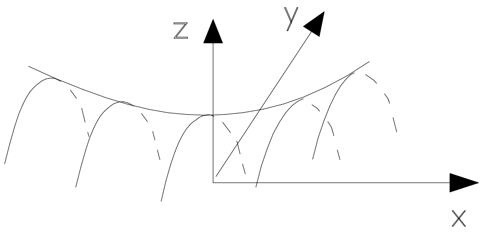
Schnittfunktion I $z_x = 0$
II $z_{xx} < 0$
=> Maximum der Schnittfunktion
(Fkt. einer Veränderlichen)

Schnittfunktion I $z_y = 0$
II $z_{yy} < 0$
=> Maximum der Schnittfunktion (Fkt. einer Veränderlichen)

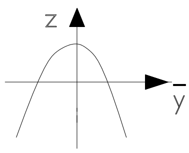
ABER kein Maximum der „Sattelfläche“

Sattelfläche „exakt“: f(x,y) = ?

Wir betrachten zunächst das Koordinatensystem $(\bar{x}, \bar{y}, z)$

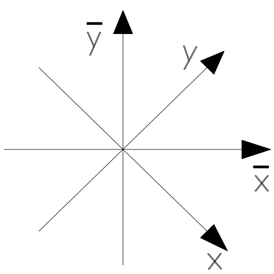


z-$\bar{y}$-Ebene



$z = \bar{x}^2 - 2\bar{y}^2$
Scheitel | Parabel

Drehung der Sattelfläche so, daß der Grad des Sattels über der Winkelhalbierenden der x-y-Achsen liegen.



Drehung um 45° nach rechts
=> um -45°

Koordinatentransformation

$$\bar{x} = x \cdot \cos\alpha - y \cdot \sin\alpha$$
$$\bar{y} = x \cdot \sin\alpha + y \cdot \cos\alpha$$
$$\alpha = -45^\circ$$
$$\Rightarrow \sin\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Somit:

$$\bar{x} = \frac{x}{\sqrt{2}} - \left(-\frac{y}{\sqrt{2}}\right) = \frac{x+y}{\sqrt{2}} \qquad \bar{y} = -\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} = \frac{y-x}{\sqrt{2}}$$

Sattel:

$$z = \bar{x}^2 - 2\bar{y}^2$$

Durch Einsetzen:

$$z = \left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)^2 - 2\left(\frac{y-x}{\sqrt{2}}\right)^2 \qquad \boxed{z = \frac{(x+y)^2}{2} - (y-x)^2}$$

$$\begin{aligned} z_x &= \frac{2\cdot(x+y)}{2}\cdot 1 - 2\cdot(y-x)\cdot(-1) \\ &= x + y + 2y - 2x = -x + 3y \end{aligned}$$

$$z_y = x + y - 2y + 2x = 3x - y$$

$$\left.\begin{array}{l} z_x\big|_{(0/0)} = 0 \\ z_y\big|_{(0/0)} = 0 \end{array}\right\} \textit{Bed I ist erfüllt} \qquad \left.\begin{array}{l} z_{xx} = -1 \\ z_{yy} = -1 \end{array}\right\rangle \left.\begin{array}{l} z_{xx} < 0 \\ z_{yy} < 0 \end{array}\right\} \textit{Bed } II_a \textit{ ist erfüllt}$$

Bed. I und II_a sind erfüllt, aber es liegt in (0/0) kein Maximum der Sattelfläche vor.

Hinreichende Bedingung für Extrema

Gegeben sei eine zweimal stetig differenzierbare Funktion z = f(x,y)
Falls gilt:

I. $z_x\big|_{(x_0/y_0)} = 0$ und $z_y\big|_{(x_0/y_0)} = 0$

und

II. $\left[z_{xx}\cdot z_{yy} - z^2{}_{xy}\right]\Big|_{(x_0/y_0)} > 0$

Diskriminante D_0

so liegt an der Stelle (x_0/y_0) ein lokales Extremum vor.

ist $z_{xx} < 0$ (oder $z_{yy} < 0$) dann Maximum
ist $z_{xx} > 0$ (oder $z_{yy} > 0$) dann Minimum

Falls $D_0 < 0$ => kein Extremum
$D_0 = 0$ => nicht entscheidbar

Anmerkung:

I und II kann auf n Variable (n > 2) erweitert werden, wobei statt II gefordert wird, daß die Matrix der zweiten Ableitung positiv definit ist.

Bsp:

Gesucht sind die lokalen Extremwerte der Funktion

$$z = 2x^3 + 4xy - 2y^3 + 5$$

1. Untersuchung der notwendigen Bedingung I
   d.h. Bestimmung von Stellen, an denen Extremwerte vorliegen können

$$z_x = 6x^2 + 4y$$
$$z_y = 4x - 6y^2$$

$$6x^2 + 4y = 0$$
$$4x - 6y^2 = 0 \qquad 4x = 6y^2 \qquad x = \frac{3}{2}y^2$$

$$6\left(\frac{3}{2}y^2\right)^2 + 4y = 0 \qquad => \frac{6\cdot 9}{4}y^4 + 4y = 0 \qquad => \frac{27}{2}y^4 + 4y = 0$$
$$=> y\left(\frac{27}{2}y^3 + 4\right) = 0 \qquad => y_1 = 0 \quad oder \; \frac{27}{2}y^3 + 4 = 0$$

$$27y^3 = -8 \Leftrightarrow y^3 = -\frac{8}{27} \Leftrightarrow y = \sqrt[3]{\frac{-8}{27}} \Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}$$

Somit:

$$y_1 = 0 \qquad => x_1 = 0 \qquad P_1(0/\ 0)$$
$$y_2 = -\frac{2}{3} \qquad => x_2 = \frac{2}{3} \qquad P_2\left(\frac{2}{3}/\ -\frac{2}{3}\right)$$

2. Untersuchung der Diskriminante

$$z_{xx} = 12x$$
$$z_{yy} = -12y$$
$$z_{xy} = 4$$

$$D = 12x\cdot(-12y) - 4^2$$
$$D = -144xy - 16$$

$D\big|_{(0/\,0)} = -16$ $\quad < 0 \quad$ im Punkt P_1 liegt **kein** Extremum vor

$D\big|_{\left(\frac{2}{3}/-\frac{2}{3}\right)} = 48$ $\quad > 0 \quad$ im Punkt P_2 liegt ein Extremum vor

da $\quad z_{xx}\big|_{\left(\frac{2}{3}/-\frac{2}{3}\right)} = 12\cdot\frac{2}{3} = 8 \quad > 0$ im Punkt P_2 liegt ein **Minimum** vor

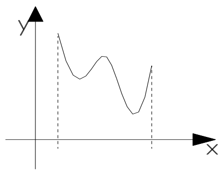
Extremwerte:

Gesucht ist das globale Maximum der Funktion $f(x,y) = 2x^3 + 4xy - 2y^3 + 5$

im Definitionsbereich

$$D = \{(x / y) \ x \in [2,1] \ y \in [0,1]\}$$

Der Globale Extremwert ist ein lokaler Extremwert oder ein Extremwert am Rand.

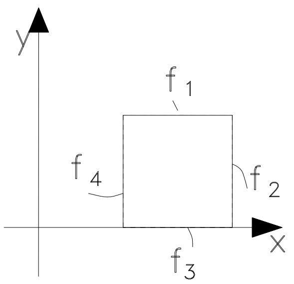


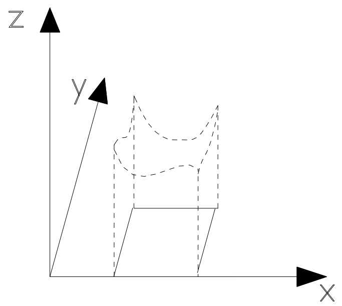
Die Untersuchung der lokalen Extremwerte (Bed. I und Diskriminante) ergibt lediglich ein Minimum in

$$P\left(\frac{2}{3};-\frac{2}{3}\right)$$

d.h. in D liegt kein lokaler Extremwert.

=> Untersuchung aller „Randpunkte“ (Randfunktionen)





$$f_1 = (x,1) = 2x^3 + 4x + 3 \qquad x \in [2,1]$$
$$f_2 = (2,y) = -2y^3 + 8y + 21 \qquad y \in [0,1]$$
$$f_3 = (x,0) = 2x^3 + 5 \qquad x \in [2,1]$$
$$f_4 = (1,y) = -2y^3 + 4y + 7 \qquad y \in [0,1]$$

$f_1 \ldots f_4$ sind Funktionen <u>einer</u> Veränderlichen. Untersuchung der globalen Maxima von $f_1 \ldots f_4$

$$f_1 = (x,1) = 2x^3 + 4x + 3 \qquad x \in [2,1] \quad \Rightarrow \text{Maximum } f_1 = 2 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2 + 3 = \underline{27}$$
$$f_2 = (2,y) = -2y^3 + 8y + 21 \qquad y \in [0,1] \quad \Rightarrow \text{nicht sofort erkennbar darum:}$$

lokale Extremwerte:

$$f_2' = -6y^2 + 8 = 0 \Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{8}{6}} \notin [0,1]$$

Randpunkte:

$$f_2(0) = 21 \quad f_2(1) = 27 \Rightarrow \text{Max } f_2 = 27$$

$f_3 = (x,0) = 2x^3 + 5 \qquad x \in [2,1] \quad \Rightarrow$ Maximum $f_3 = 2 \cdot 2^3 + 5 = \underline{21}$

$f_4 = (1, y) = -2y^3 + 4y + 7 \qquad y \in [0,1] \quad \Rightarrow$ wie f_2 oder

Abschätzung:

$$\left|f_4(y)\right| = \left|-2y^3 + 4y + 7\right| \le \left|-2y^3\right| + \left|4y\right| + \left|7\right| \le 2 + 4 + 7 = 13$$

Somit insgesamt f(x,y) hat in D an der Stelle (2,1) das globale Maximum f(2,1) = 27