$\underline{\underline{\text{Pr}\,ogramm : Trapezformel}}$

$\underline{Eingabe}$: *Integrationsuntergrenze a*

Integrationsobergrenze b

Anzahl Unterteilungen n

[Funktion f(x)]

$\underline{Verarbeitung}$:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \cdot \left(\frac{1}{2}\big(f(a) + f(b)\big) + \sum_{i=1}^{n-1} f(a + i \cdot h) \right) = I$$

$\underline{Ausgabe}$: I

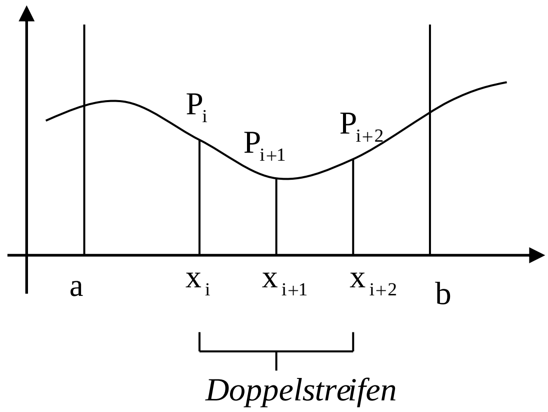
```
10   REM EINGABE
20   INPUT "UNTERGRENZE :", A
30   INPUT "OBERGRENZE :", B
40   INPUT " ANZAHL  UNTERTEILUNGEN :", N

100  REM VERARBEITUNG
110  H = (B – A) / N

120  X = A
130  GOSUB  500
140  I = 0,5*Y
150  X = B
160  GOSUB  500
170  I = I + 0,5*Y
180  FOR  I = 1  TO  N – 1
190  X = A + I * H
200  GOSUB  500
210  I = I + Y
220  Next  I
230  I = I / H

300  REM  AUSGABE
310  PRINT  " NAEHERUNGSWErt :",  I
320  END

500  REM  FUNKTION  Y = F(X)
510  Y = 1/ X
520  RETURN
```

6.4.2 Simpsonsche Formel

– Zerlegung von $[a, b]$ in 2n gleiche Teile (d.h. gerade Anzahl)

$$h = \frac{b - a}{2n}$$

– Zusammenfassung von je 2 benachbarten Streifen zu einem Doppelsteifen
- Näherungsweise Berechnung der "Fläche" des Doppelstreifen



Pro Doppelstreifen sind 3 Funktionswerte bekannt.

Lösungsansatz:

Exakter Funktionsverlauf durch die Punkte P_i; P_{i+1} *und* P_{i+2} wird durch eine Parabel angenähert (nicht durch Geraden $\rightarrow$ Trapez):

Allg. Parabeldarst.: $y(x) = ax^2 + bx + c$

Klar: Einsetzen der Punkte P_i, P_{i+1} *und* P_{i+2} *führt* zur eindeutigen Bestimmung von a, b und c.

$$\Rightarrow \int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)dx \approx \int_{x_i}^{x_{i+2}} ax^2 + bx + c\,dx = \left[a\frac{x^3}{3} + b\frac{x^2}{2} + cx \right]_{x_{i+1}-h}^{x_{i+1}+h}$$

$$= \frac{a}{3}(x_{i+1} + h)^3 + \frac{b}{2}(x_{i+1} + h)^2 + c(x_{i+1} + h) - \frac{a}{3}(x_{i+1} - h)^3 - \frac{b}{2}(x_{i+1} - h)^2 - c(x_{i+1} - h)$$

$$= \frac{a}{3}\left(6x_{i+1}^2 h + 2h^3\right) + \frac{b}{2}(4x_{i+1}h) + c \cdot 2h \qquad (*)$$

Ziel: "$\int$" soll lediglich durch die Stützwerte y_i, y_{i+1} und y_{i+2} dargestellt werden.

Stützwerte sind Funktionswerte der Parabel $y = ax^2 + bx + c$.

Einsetzen in P_i, P_{i+1} und P_{i+2} mit $x_i = x_{i+1} - h \qquad x_{i+2} = x_{i+1} - h$ liefert

$$
\begin{aligned}
y_i &= a(x_{i+1} - h)^2 + b(x_{i+1} - h) + c \\
4y_{i+1} &= 4ax_{i+1}^2 + 4bx_{i+1} + 4c \\
+\ y_{i+2} &= a(x_{i+1} + h)^2 + b(x_{i+1} + h) + c
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y_i + 4y_{i+1} + y_{i+2} &= a(x_{i+1}^2 - 2x_{i+1}h + h^2 + 4x_{i+1}^2 + x_{i+1}^2 + 2x_{i+1}h + h^2) \\
&\quad + b(x_{i+1} - h + 4x_{i+1} + x_{i+1} + h) + 6c
\end{aligned}
$$

$$y_i + 4y_{i+1} + y_{i+2} = a(6x_{i+1}^2 + 2h^2) + b(6x_{i+1}) + 6c \qquad / \cdot \frac{h}{3}$$

$$\frac{h}{3}(y_i + 4y_{i+1} + y_{i+2}) = \frac{a}{3}(6x_{i+1}^2 h + 2h^3) + b(\frac{h}{3} 6x_{i+1}) + \frac{6}{3}ch$$

Somit folgt mit (*):

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_i + 4y_{i+1} + y_{i+2})$$

Summation über sämtliche Doppelstreifen ergibt die Näherungslösung:

Sei A_i die Fläche des Doppelstreifen $\Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
\int_b^a f(x)dx &\approx A_1 + A_2 + A_3 + A_4 \ldots + A_n \\
&= \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) + \ldots.. + \frac{h}{3}(y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}) \\
&= \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2 + y_2 + 4y_3 + y_4 + \ldots.. + y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}) \\
&= \frac{h}{3}\left[(y_0 + y_{2n}) + 4(y_1 + y_3 + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + y_{2n-2})\right]
\end{aligned}
$$

Zusammenfassung Simpsonsche Formel

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[(y_0 + y_{2n}) + 4(y_1 + y_3 + \ldots. + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \ldots. + y_{2n-2}\right]$$

$$= \frac{h}{3}\left[\sum{}_{ab} + 4\sum{}_{n} + 2\sum{}_{G}\right]$$

wobei $h = \frac{b-a}{2n} \widehat{=}$ Breite eines einfachen Streifens

und $y_i \quad i = 1,2,3,\ldots.,2n$ Stützwerte (Fkt - Werte, Wertetabelle)

Anmerkung : Im Grenzfall $\lim\limits_{n\to\infty}$ strebt der Näherungswert gegen den exakten Wert.

Bsp. 1:

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx = ?$$

a) Exakte Lösung :

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx = \left[\ln|x|\right]_1^2 = \ln 2 - \ln 1 \approx 0{,}693147$$

b) Berechnung einer Näherungslösung mit Simpsonscher-Formel
Wähle n=5, d.h. i Stützstellen i=0,1,2,3,....,10

Tabelle

i	x_i	$y_i = f(x_i) = \frac{1}{x_i}$		
0	1,0	1,0		
1	1.1		0,909091	
2	1,2			0,833333
3	1,3		0,769231	
4	1,4			0,714286
5	1,5		0,666667	
6	1,6			0,625000
7	1,7		0,588235	
8	1,8			0,555556
9	1,9		0,526316	
10	2	0,5		
		1,5	3,459540	2,728175
		$=\sum_{ab}$	$=\sum_{n}$	$=\sum_{G}$

$$\Rightarrow \int_1^2 \frac{1}{x}dx \approx \frac{h}{3}\left(\sum{}_{ab} + 4\sum{}_{n} + \sum{}_{G}\right) = \frac{0{,}1}{3}\cdot 20{,}794510 = 0{,}693150$$

c) Bestimmung einer Näherungslösung mit der Trapezformel

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = \left[\ln|x|\right]_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = 0{,}693147$$

a) Trapez

Tabelle

i	x_i	$y_i = \frac{1}{x_i}$	
0	1,0	1,0	
1	1,1		0,909091
2	1,2		0,833333
3	1,3		0,769231
4	1,4		0,714286
5	1,5		0,666667
6	1,6		0,625000
7	1,7		0,588235
8	1,8		0,555556
9	1,9		0,526316
10	2,0	0,5	
		1,5	6,187715

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \approx 0{,}1\left(\frac{1}{2}\cdot 1{,}5 + 6{,}187715\right) = 0{,}693771$$

Untersuchung des Ergebnisses:

$\text{Wert}_{\text{Trapez}} > \text{exakter Wert}$

Vergleich Trapezformel - Simpson-Formel an diesem Bsp. zeigt :

exakt	:	0,693147
Trapez	:	0,693771
Simpson	:	0,693150

Näherungslösung mit Simpson ist besser.