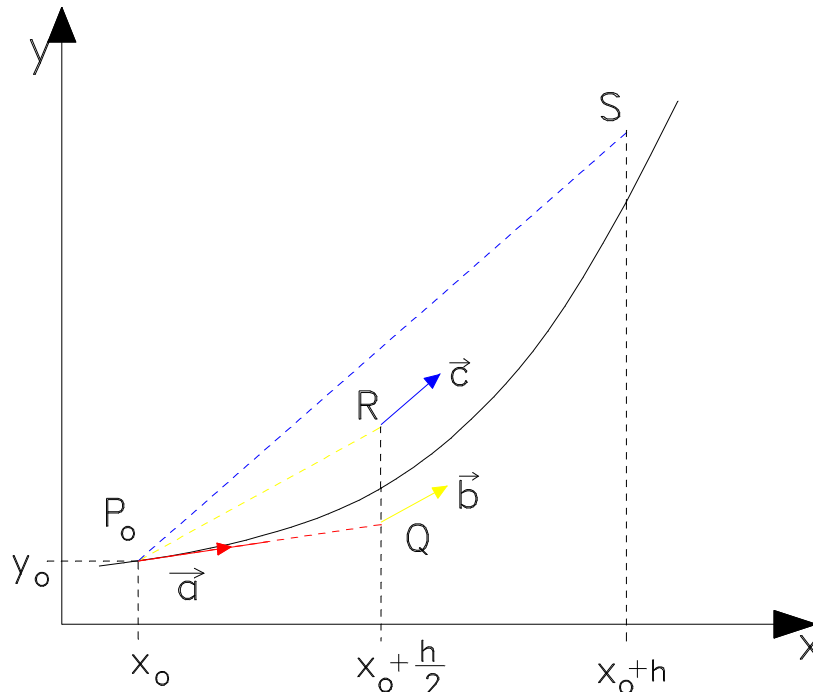


Geometrische Veranschaulichung

Prinzip:

mit der zuletzt bestimmten Steigung wird die neue Steigung berechnet,

d.h. 1. \vec{a} 2. mit \vec{a} \vec{b} 3. mit \vec{b} \vec{c} 4. mit \vec{c} \vec{d} 

$\vec{c} \neq \vec{b}$ da die y - Werte von $\vec{c} \neq \vec{b}$ und die Funktion $f(x, y)$ ist

Start:

$m_1 = f(x_0, y_0)$ ist Steigung im Startpunkt P_0 (Richtungselement \vec{a})

Mitte:

$m_2 = f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}\right)$ ist Steigung in Q (Richtungselement \vec{b})

da $y_Q = y_0 + \frac{1}{2}h \cdot f(x_0, y_0) = y_0 + \frac{k_1}{2}$

$m_3 = f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}\right)$ ist Steigung in R (Richtungselement \vec{c})

da $y_R = y_0 + \frac{1}{2}h \cdot \underbrace{f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}\right)}_{\text{parallel zu } \vec{b}} = y_0 + \frac{k_2}{2}$

d.h. von P_0 in Richtung \vec{b} auf die Intervallmitte zu

Endpunkt:

$m_4 = f(x_0 + h, y_0 + k_3)$ ist Steigung in S (Richtungselement \vec{d})
von P_0 in Richtung \vec{c} zum Intervallende S

$$y_s = y_0 + h \cdot f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}\right) = y_0 + k_3$$

Insgesamt erhalten wir für “gemittelte“ Steigung :

$$m = \frac{m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4}{6}$$

13.3 Dgl. 1.Ordnung

13.3.1 Trennung der Variablen

Gegeben sei Dgl. der Form $y' = f(x) \cdot g(y)$

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y) \quad / \cdot dx$$

$$dy = f(x) \cdot g(y) dx \quad / : g(y) \text{ falls } \neq 0$$

$$\frac{1}{g(y)} dy = f(x) dx$$

Variablen x und y sind getrennt

Integration:

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx$$

anschließend Auflösen nach y liefert die Lösung der Dgl. in expliziter Form

Bsp(1):

$$x + y \cdot y' = 0$$

Dgl. 1.Ordnung in impliziter Form

$$y(0) = 2$$

Anfangswert

Trennung der Variablen:

$$x + y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$y dy = -x dx$$

Integration:

$$\begin{aligned}\int y \, dy &= -\int x \, dx \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}y^2 + C_1 &= -\frac{1}{2}x^2 + C_2 \\ \frac{1}{2}y^2 &= -\frac{1}{2}x^2 + C \\ y^2 &= -x^2 + 2C\end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung in impliziter Form: $y^2 + x^2 = 2C$ (Kreis)Die spezielle Lösung für $y(0) = 2$:

$$\begin{aligned}2^2 + 0^2 &= 2C \\ \Rightarrow C &= 2 \\ y^2 + x^2 &= 4\end{aligned}$$

Die spezielle Lösung ergibt einen Kreis mit dem Radius 2.

Bsp(2):

$$\begin{aligned}y' &= y \\ \frac{dy}{dx} = y &\Rightarrow dx = \frac{dy}{y} \quad (\text{falls } y \neq 0 \text{ d.h. Fall } y = 0 \text{ ist separat zu untersuchen}) \\ \int dx &= \int \frac{dy}{y} \\ x + C_1 &= \ln|y| + C_2 \\ \ln|y| &= x + C \\ e^{\ln|y|} &= e^{x+C} \\ y &= \pm e^C \cdot e^x \\ y &= K \cdot e^x\end{aligned}$$

mit $K = \pm e^C \quad K \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Untersuchung von $y = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d0}{dx} = 0 = y'$$

d.h. auch $y(0) \equiv 0$ (Abbildung auf der x-Achse) erfüllt die Dgl.

Insgesamt erhalten wir:

$$y = K_1 \cdot e^x \quad \text{mit } K_1 \in \mathbb{R}$$

als allgemeine Lösung der Dgl. $y = y'$

13.3.2 Integration einer Dgl. durch Substitution

Gegeben sei eine Dgl. 1.Ordnung der Form $y' = f(x, y)$, wobei auf den ersten Blick das Verfahren der Trennung der Variablen nicht anwendbar erscheint. Aber durch Wahl einer geeigneten Substitution ist das Verfahren der Trennung der Variablen anwendbar.

Bsp(1):

$$y' = 2x - y$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x - y$$

$$\underbrace{dy = (2x - y)dx}_{\text{falscher Ansatz}}$$

falscher Ansatz

Substitution:

$$u = 2x - y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = u \quad \text{nun 3 Variablen}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(2x - u)}{dx} = \frac{d2x}{dx} - \frac{du}{dx} = 2 - \frac{du}{dx}$$

$$\Rightarrow 2 - \frac{du}{dx} = u$$

$$\Rightarrow 2 - u = \frac{du}{dx}$$

$$(2 - u)dx = du$$

$$dx = \frac{du}{2 - u} \quad \text{für } 2 - u \neq 0$$

$$\int dx = \int \frac{du}{2 - u} = -\int \frac{du}{u - 2}$$

$$-x = \ln|u - 2| + C$$

$$e^{-x} = e^{\ln|u-2|} \cdot \underbrace{e^C}_{C_1}$$

$$e^{-x} = |u - 2| \cdot C_1$$

$$C_2 \cdot e^{-x} = |u - 2|$$

$$1. \text{ Fall } C_2 e^{-x} = +(u - 2)$$

$$2. \text{ Fall } C_2 e^{-x} = -(u - 2)$$

$$\Leftrightarrow -C_2 e^{-x} = (u - 2)$$

$$\Rightarrow C \cdot e^{-x} = u - 2 \quad C \in \mathbb{R}$$

Rücksubstitution: $u - 2 = (2x - y) - 2 = C \cdot e^{-x}$

$$\Rightarrow y(x) = K \cdot e^{-x} + 2x - 2$$

Bsp(2):

Gegeben sei Dgl. 1. Ordnung der Form $y' = f(ax + by + c)$

Wähle Substitution:

$$u = ax + by + c$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx} = a + by'$$

mit $y' = f(u)$ erhalten wir:

$$u' = a + b \cdot f(u)$$

$$\frac{du}{dx} = a + b \cdot f(u)$$

$$du = (a + b \cdot f(u))dx$$

$$\Rightarrow \frac{du}{a + b \cdot f(u)} = dx$$

d.h. Lösung kann mit dem Verfahren der Trennung der Variablen bestimmt werden.

Bsp(3):

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{x + 2y}{x}$$

wähle

$$u = \frac{y}{x} \Rightarrow y' = f(u)$$

$$y = ux$$

$$y' = \frac{d(ux)}{dx} = u'x + u$$

Somit

$$u'x + u = f(u)$$

$$\frac{du}{dx}x = f(u) - u \quad / \cdot \frac{dx}{x}$$

$$du = (f(u) - u) \frac{dx}{x} \quad / : (f(u) - u)$$

$$\Rightarrow \frac{du}{(f(u) - u)} = \frac{dx}{x}$$

Lösung durch Trennung der Variablen

Zusammenfassung:

Dgl. 1.Ordnung von Typ

a) $y' = f(ax + by + c)$ lassen sich durch Substitution $u = ax + by + c$

b) $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ lassen sich durch Substitution $u = \frac{y}{x}$

wie folgt lösen:

1. Substitution
2. Lösen der substituierten Dgl. in den Variablen x und u mit dem Verfahren der Trennung der Variablen
3. Rücksubstitution

Anmerkung:

Bei der Bestimmung der allgemeinen Lösung sind insbesondere Fälle der Division durch Null zu beachten.

13.3.3 Lineare Dgl. 1.Ordnung

bisher:

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

Sonderfälle:

$$y' = f(ax + by + c)$$

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Definition:

Eine Dgl. 1.Ordnung heißt linear, falls sie von der Form $y' + f(x) \cdot y = s(x)$ ist.
 $s(x)$ heißt Störfunktion

Falls $s(x) = 0$, dann heißt die obige Dgl. homogen, ansonsten inhomogen.

1) Untersuchung der homogenen Dgl.

$$y' + f(x) \cdot y = 0$$

$$\Rightarrow y' = -f(x) \cdot y$$

$$\frac{dy}{dx} = -y \cdot f(x)$$

d.h. Lösung mit dem Verfahren der Trennung der Variablen

2) Untersuchen der inhomogenen Dgl.

Lösungsmethoden:

1. Variation der Konstanten
2. Suchen einer partikulären (speziellen) Lösung

13.3.3.1 Variation der Konstanten

Gesucht wird die Lösung der Dgl. $y' + f(x) \cdot y = s(x)$

Zunächst: Lösen der homogenen Dgl.:

$$y' + f(x) \cdot y = 0$$

$$y' = -y \cdot f(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = -y \cdot f(x)$$

$$\frac{dy}{y} = -f(x)dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int f(x)dx$$

$$\ln|y| + C = -\int f(x)dx$$

$$e^{\ln|y|} = e^{-\int f(x)dx - C}$$

$$|y| = e^{-\int f(x)dx} \cdot e^{-C}$$

$$y \geq 0 \Rightarrow y(x) = e^{-C} \cdot e^{-\int f(x)dx} \quad C \in \mathbb{R} \Rightarrow e^C \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$$

$$y < 0 \Rightarrow -y(x) = e^{-C} \cdot e^{-\int f(x)dx}$$

$$y(x) = -e^{-C} \cdot e^{-\int f(x)dx}$$

$$\Rightarrow y(x) = K \cdot e^{-\int f(x)dx} \quad K \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

mit $y = 0$ ist auch $K = 0$ erlaubt $\Rightarrow K \in \mathbb{R}$

inhomogene Dgl. $y' + f(x) \cdot y = s(x) \quad (1)$

Idee (Lagrange) : Integrationskonstante K wird durch Funktion $K(x)$ ersetzt.

Differentiation $y(x)$ erfolgt mit Produktregel (\rightarrow Summe, wobei $S(x)$ entstehen soll)

Ansatz für inhomogene Dgl.

$$y(x) = K(x) \cdot e^{-\int f(x)dx}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \left(K(x) \cdot e^{-\int f(x)dx} \right)'$$

$$= K'(x) \cdot e^{-\int f(x)dx} + K(x) \cdot e^{-\int f(x)dx} \cdot (-f(x))$$

Einsetzen in (1) liefert:

$$\underbrace{K'(x) \cdot e^{-\int f(x) dx} - f(x) \cdot K(x) \cdot e^{-\int f(x) dx}}_{y'} + \underbrace{f(x) \cdot K(x) \cdot e^{-\int f(x) dx}}_{f(x) \cdot y} = s(x)$$

$$\Rightarrow K'(x) \cdot e^{-\int f(x) dx} = s(x) \quad K(x) = ?$$

$$K'(x) = s(x) \cdot e^{\int f(x) dx}$$

$$K(x) = \int s(x) \cdot e^{\int f(x) dx} dx + C$$

Einsetzen in Ansatz

für $y(x)$:

$$y(x) = \left(\int s(x) \cdot e^{\int f(x) dx} dx + C \right) \cdot e^{-\int f(x) dx}$$

ist allgemeine Lösung der inhomogenen Dgl. (1)

Zusammenfassung:

Eine inhomogene Dgl. 1. Ordnung vom Typ $y' + f(x) \cdot y = s(x)$ lässt sich durch Variation der Konstanten wie folgt lösen:

1. Integration der homogenen Dgl. $y_0(x) = K \cdot e^{-\int f(x) dx}$
2. Variation der Konstanten $K \rightarrow K(x)$

$$\text{Ansatz: } y(x) = K(x) \cdot e^{-\int f(x) dx}$$

Einsetzen in inhomogene Dgl. liefert Dgl. 1. Ordnung für $K(x)$, die durch Integration gelöst werden kann.

Anm.: Allg. Lösung der inhom. Dgl = Allg. Lösung der hom. Dgl. + spezielle Lösung der inhom. Dgl.

Bsp: Variation der Konstanten

$$y' + \frac{y}{x} = \sin x \quad \Leftrightarrow \quad y' + \frac{1}{x} \cdot y = \sin x$$

d.h. Einsetzen von $f(x)$ und $s(x)$ in allgemeine Lösungsformel und berechnen der Integrale ergibt die Lösung.

Wir wiederholen das Verfahren zur Bestimmung der allgemeinen Lösung am Beispiel:

1. Lösen der homogenen Dgl. $y' + \frac{y}{x} = 0$

2. Variation der Konstanten

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= -\frac{y}{x} \\ \Rightarrow \frac{dy}{y} &= -\frac{dx}{x} \quad y \neq 0\end{aligned}$$

Integration

$$\begin{aligned}\Rightarrow \int \frac{dy}{y} &= -\int \frac{dx}{x} \\ \Rightarrow \ln|y| &= -\ln|x| + C \\ e^{\ln|y|} &= e^{-\ln|x|+C} \\ &= e^{-\ln|x|} \cdot e^C \\ |y| &= \frac{1}{|x|} \cdot k \quad k \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}\end{aligned}$$

Fallunterscheidung:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{für } a \geq 0 \\ -a & \text{für } a < 0 \end{cases}$$
$$\begin{aligned}y \geq 0: y &= k \cdot \frac{1}{|x|} & \begin{cases} x > 0 \Rightarrow y = k \frac{1}{x} \\ x < 0 \Rightarrow y = -k \frac{1}{x} \end{cases} & \left. \vphantom{\begin{matrix} y \geq 0 \\ y < 0 \end{matrix}} \right\} y = k_1 \cdot \frac{1}{x} \quad k_1 \neq 0 \\ y < 0: y &= -k \cdot \frac{1}{|x|} & \begin{cases} x > 0 \Rightarrow y = -k \frac{1}{x} \\ x < 0 \Rightarrow y = -k \frac{1}{-x} \end{cases} & \left. \vphantom{\begin{matrix} y \geq 0 \\ y < 0 \end{matrix}} \right\} y = k_1 \cdot \frac{1}{x} \quad k_1 \neq 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y = 0 &\Rightarrow k_1 = 0 \\ \Rightarrow y &= k_1 \cdot \frac{1}{x} \quad k \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

allgemeine Lösung der homogenen Dgl.

Variation der Konstanten $K = K(x)$

Ansatz:

$$y(x) = \frac{K(x)}{x} \Rightarrow y'(x) = \frac{K'(x) \cdot x - K(x) \cdot 1}{x^2}$$

inhomogene

Dgl.

$$y' + \frac{y}{x} = \sin x$$

einsetzen ergibt:

$$\begin{aligned} \frac{K'(x) \cdot x - K(x) \cdot 1}{x^2} + \frac{K(x)}{x} \cdot \frac{1}{x} &= \sin x \\ \frac{K'(x) \cdot x}{x^2} = \sin x &\Leftrightarrow \frac{K'(x)}{x} = \sin x \Leftrightarrow \\ K'(x) = x \cdot \sin x &\Leftrightarrow dK(x) = x \cdot \sin x \, dx \end{aligned}$$

Integration:

$$K(x) = \int x \cdot \sin x \, dx + C = x \cdot (-\cos x) - \int 1 \cdot (-\cos x) dx + C$$

partielle Integration:

$$K(x) = \sin x - x \cdot \cos x + C$$

Insgesamt:

$$y(x) = \frac{\sin x - x \cdot \cos x + C}{x} = \frac{\sin x + C}{x} - \cos x \quad C \in \mathbb{R}$$

Zusammenfassung: **Dgl 1. Ordnung**

- Trennung der Variablen $y' = f(x) \cdot g(y)$
- Substitution $y' = f(x, y)$

Bsp.

$$y' = f(ax + by + c) \quad u = ax + by + c$$

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad u = \frac{y}{x}$$

- lineare Dgl 1. Ordnung	$y' + f(x) \cdot y = s(x)$	(inhomogen)
	$y' + f(x) \cdot y = 0$	(homogen)
- Variation der Konstanten	$y(x) = \underbrace{\left(\int S(x) \cdot e^{\int f(x) dx} dx \right) \cdot e^{-\int f(x) dx}}_{\text{Lösung der inhomogenen Dgl}} + \underbrace{C \cdot e^{-\int f(x) dx}}_{\text{allgemeine Lösung der homogenen Dgl}}$	

13.3.3.2 Suchen einer partikulären Lösung

Gegeben sei eine inhomogene Dgl 1. Ordnung $y' + f(x) \cdot y = s(x)$
 $y_0 = y_0(x)$ sei Lösung der homogenen Dgl $y' + f(x) \cdot y = 0$ und $y_p(x)$ sei eine beliebige, aber spezielle Lösung der inhomogenen Dgl

=>

Allgemeine Lösung der inhomogenen Dgl $y(x) = y_0(x) + y_p(x)$

Beweis:

zu zeigen: **1.** $y(x)$ erfüllt die inhomogene Dgl

$$\begin{aligned}
 y' + f(x) \cdot y(x) &= (y_0(x) + y_p(x))' + f(x) \cdot (y_0(x) + y_p(x)) \\
 &= y_0'(x) + y_p'(x) + f(x) \cdot y_0(x) + f(x) \cdot y_p(x) \\
 &= y_0'(x) + f(x) \cdot y_0(x) + y_p'(x) + f(x) \cdot y_p(x) \\
 &= 0 + s(x) \\
 &= s(x)
 \end{aligned}$$

zu zeigen: **2.** jede Lösung der inhomogenen Dgl ist von der Form $y_0(x) + y_p(x)$ Sei $\tilde{y}(x)$ beliebige Lösung der inhomogenen Dgl

$$\text{d.h. } \tilde{y}' + f(x) \cdot \tilde{y}(x) = s(x) \quad (1)$$

Beachte spezielle Lösung $y_p(x)$

$$s(x) = y_p'(x) + f(x) \cdot y_p(x)$$

einsetzen in (1):

$$\tilde{y}' + f(x) \cdot \tilde{y}(x) = y_p'(x) + f(x) \cdot y_p(x)$$

$$\tilde{y}' + f(x) \cdot \tilde{y}(x) - y_p'(x) - f(x) \cdot y_p(x) = 0$$

$$\tilde{y}' - y_p'(x) + f(x) \cdot (\tilde{y}(x) - y_p(x)) = 0$$

d.h.

$\tilde{y}(x) - y_p(x)$ ist Lösung der homogenen Dgl und somit von der Form $y_0(x)$

$$y_0(x) = \tilde{y}(x) - y_p(x)$$

$$\tilde{y}(x) = y_p(x) + y_0(x)$$

Anwendung:

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Dgl $y'(x) + f(x) \cdot y(x) = s(x)$ kann wie folgt bestimmt werden:

- 1) Bestimmung einer beliebigen, aber speziellen Lösung der inhomogenen Dgl
- 2) Die allgemeine Lösung der homogenen Dgl bestimmen
- 3) Die Addition der beiden Lösungen aus 1) und 2) ergibt die allgemeine Lösung der inhomogenen Dgl

Bsp(1):

Gesucht ist die allgemeine Lösung der Dgl $y' + \frac{y}{x} = x^2$

Verfahren:

- 1) Bestimmung einer partikulären Lösung

Ansatz: $y_p(x) = ax^3$ $y_p'(x) = 3ax^2$

Einsetzen in Dgl

$$3ax^2 + \frac{ax^3}{x} = x^2$$

$$3ax^2 + ax^2 = x^2$$

$$4ax^2 = x^2$$

$$4a = 1$$

$$a = \frac{1}{4}$$

Es wird ax^3 gewählt, da auf der rechten Seite der Gleichung x^2 vorhanden ist und somit auch auf der linken Seite der Gleichung x^2 erwünscht ist.

Abl von ax^3 ergibt x^2

$\frac{ax^3}{x}$ ergibt x^2

Partikuläre Lösung $y_p(x) = \frac{1}{4}x^3$

2. Lösung der homogenen Dgl $y' + \frac{y}{x} = 0$

$$y_0(x) = \frac{C}{x} \quad C \in \mathbb{R}$$

(siehe Bsp Variation der Konstanten Seite 68)

Gesamt:

Allgemeine Lösung der inhomogenen Dgl

$$y(x) = \frac{C}{x} + \frac{1}{4}x^3 \quad \text{mit } C \in \mathbb{R}$$

Bsp(2):

Gesucht ist allg. Lösung der Dgl. $y' + \frac{y}{x} = \sin x$ sowie spez. Lsg. mit $y(\pi)=2$

1. Partikuläre Lösung $y(x) = \frac{\sin x}{x} - \cos x$

Probe: $y'(x) = \frac{x \cdot \cos x - \sin x}{x^2} - (-\sin x)$

einsetzen: $\frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2} + \sin x + \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x} = \sin x$

2. Lsg. der hom. Dgl.

$$y' + \frac{y}{x} = 0 \quad \text{ist } y_0(x) = \frac{C}{x}$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{\sin x}{x} - \cos x + \frac{C}{x} = \frac{\sin x + C}{x} - \cos x \quad C \in \mathbb{R}$$

spez. Lsg. : $y(\pi) = 2$ d.h. konstante C ist zu bestimmen

$$y(\pi) = \frac{\sin \pi}{\pi} - \cos \pi + \frac{C}{\pi} = \frac{0}{\pi} - (-1) + \frac{C}{\pi} = 1 + \frac{C}{\pi}$$

$$1 + \frac{C}{\pi} = 2 \Leftrightarrow \frac{C}{\pi} \Leftrightarrow \boxed{C = \pi}$$

13.4 Dgl 2. Ordnung (mit konstanten Koeffizienten)

Allgemeine lineare Dgl 2. Ordnung

$$y'' + f_1(x) \cdot y' + f_0(x) \cdot y = s(x)$$

Definition:

Eine Dgl vom Typ $y'' + ay' + by = s(x)$ heißt lineare Dgl 2. Ordnung mit konstanten

Koeffizienten (a und b). Störfunktion $s(x)$. Falls $S(x) \equiv 0$ ist die Dgl 2. Ordnung homogen.

13.4.1 homogene Dgl 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y'' + ay' + by = 0 \quad (1)$$

Satz:

Sei $y_1(x)$ und $y_2(x)$ Lösung, dann ist auch $y(x) = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x)$ Lösung der Dgl

Beweis durch Einsetzen.

Problemstellung: Bestimmung der allgemeinen Lösung von (1)

Struktur der Lösung:

1. Dgl 1. Ordnung $y' + ay = 0$

Die Integration liefert einen frei wählbaren Parameter C_1

2. Dgl 2. Ordnung $y'' + ay' + by = 0$

Zweimalige Integration liefert zwei frei wählbare Parameter C_1 und C_2

Daraus folgt:

Falls $y_1(x)$ und $y_2(x)$ Lösung von (1) ist, dann ist

$$y(x) = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x) \text{ allgemeine Lösung von (1)}$$

(da C_1 und C_2 zwei frei wählbare Parameter und falls $y(x)$ nicht in der Form

$$y(x) = C_3 \cdot y_3(x) \text{ darstellbar ist.)}$$

d.h.

C_1 und C_2 dürfen nicht zusammengefaßt werden können.

Bestimmung von Funktionen $y_1(x)$ und $y_2(x)$ zur Lösung von $y'' + ay' + by = 0$

(homogene Dgl)

Lösungsidee: Verwendung einer Fkt. deren Ableitung = Konstante · Funktion

$$y(x) = e^{kx}$$

$$y'(x) = k \cdot e^{kx}$$

$$y''(x) = k^2 \cdot e^{kx}$$

Durch Einsetzen erhält man:

$$k^2 \cdot e^{kx} + ak \cdot e^{kx} + b \cdot e^{kx} = 0$$

(charakteristische Gleichung)

$$k^2 + ak + b = 0$$

$$k_{1/2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$$

Fallunterscheidung:

1. Fall:

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{4} - b = 0 &\Rightarrow k_1 = k_2 = -\frac{a}{2} \\ &\Rightarrow a = -2k \\ &b = \frac{a^2}{4} = k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y_1(x) &= e^{kx} \text{ und} \\ y_2(x) &= x \cdot e^{kx} \end{aligned}$$

Die zweite Lösung läßt sich durch Einsetzen beweisen.

Somit erhalten wir als allgemeine Lösung:

$$y(x) = C_1 \cdot e^{kx} + C_2 \cdot x \cdot e^{kx}$$

2. Fall:

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{4} - b > 0 &\Rightarrow k_1 \neq k_2 \\ \Rightarrow y_1(x) &= e^{k_1 x} \\ y_2(x) &= e^{k_2 x} \end{aligned}$$

Somit erhalten wir als allgemeine Lösung:

$$y(x) = C_1 \cdot e^{k_1 x} + C_2 \cdot e^{k_2 x}$$

3.Fall

$$\frac{a^2}{4} - b < 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\frac{a^2}{4} - b} = j \cdot \omega \quad \omega \in \mathbb{R} \quad \text{und } j = \sqrt{-1}$$

$$k_{1/2} = -\frac{a}{2} \pm j \cdot \omega \quad (\text{komplexe Lösung})$$

$$\begin{aligned} y_{1/2}(x) &= e^{k_{1/2}x} = e^{\left(-\frac{a}{2} \pm j\omega\right) \cdot x} \\ &= e^{-\frac{a}{2}x} \cdot e^{\pm j\omega x} \\ &= e^{-\frac{a}{2}x} \cdot e^{j(\pm\omega x)} \quad (\text{Verwende: } e^{j\omega} = \cos \omega + j \sin \omega \text{ Eulersche Formel}) \\ &= e^{-\frac{a}{2}x} \cdot (\cos(\pm\omega x) + j \cdot \sin(\pm\omega x)) \\ y(x) &= \underbrace{e^{-\frac{a}{2}x} \cdot \cos(\omega x)}_{y_1(x)} \pm j \cdot \underbrace{e^{-\frac{a}{2}x} \cdot \sin(\omega x)}_{y_2(x)} \\ &\quad \text{Realteil} \quad \quad \text{Imaginärteil} \end{aligned}$$

Somit erhalten wir als allgemeine Lösung:

$$y(x) = C_1 \cdot e^{-\frac{a}{2}x} \cdot \cos(\omega x) + C_2 \cdot e^{-\frac{a}{2}x} \cdot \sin(\omega x)$$

Anmerkung:

1) mit dem Lösungsansatz $y(x) = e^{kx}$ können auch Dgl höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten gelöst werden.

2) Mit obigem Ansatz haben wir die komplette und vollständige Lösung explizit bestimmt (<= einfaches Schema !)

Bsp(1):

$$\begin{aligned} y'' - 6y' + 9y &= 0 & a &= -6 \\ & & b &= 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{1/2} &= -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b} \\ &= -\frac{-6}{2} \pm \sqrt{\frac{36}{4} - 9} \\ &= 3 \pm 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y(x) = C_1 \cdot e^{3x} + C_2 \cdot x \cdot e^{3x}$$

Bsp(2):

$$y'' + 3y' - 4y = 0$$

$$k_{1/2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - (-4)}$$

$$= -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}}$$

$$= -\frac{3}{2} \pm \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow k_1 = 1$$

$$k_2 = -4$$

$$\Rightarrow y(x) = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{-4x}$$

Bsp(3):

$$y'' + 4y' + 20y = 0$$

$$k_{1/2} = -\frac{4}{2} \pm \sqrt{\frac{16}{4} - 20}$$

$$= -2 \pm \sqrt{-16}$$

$$= -2 \pm 4j$$

$$\Rightarrow y(x) = C_1 \cdot e^{-2x} \cos 4x + C_2 \cdot e^{-2x} \sin 4x$$

13.4.2 Inhomogene Dgl 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

gegeben sei Dgl der Form $y'' + ay' + by = s(x)$

$s(x)$ heißt Störfunktion

Die allgemeine Lösung ist von der Form $y(x) = y_0(x) + y_p(x)$, wobei $y_0(x)$ die allgemeine Lösung der homogenen Dgl, und $y_p(x)$ eine beliebige partikuläre Lösung der Dgl ist.

$y_0(x)$ ist bekannt (siehe 13.4.1), somit bleibt als Restproblem die Bestimmung von $y_p(x)$ in Abhängigkeit von $s(x)$.

Lösungsansatz für $y_p(x)$ in Abhängigkeit von $s(x)$

I $s(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$
 $\Rightarrow y_p(x)$ ist Polynom vom Grad n falls $a_0 \neq 0$ und $b \neq 0$
 $y_p(x)$ ist Polynom vom Grad $(n+1)$ falls $a_1 \neq 0$ und $a_0 = 0$
 $y_p(x)$ ist Polynom vom Grad $(n+2)$ falls $a_2 \neq 0$ und $a_1 = a_0 = 0$

II $s(x) = C_1 \cdot \cos \omega x + C_2 \cdot \sin \omega x$
 $\Rightarrow y_p(x) = A \cdot \cos \omega x + B \cdot \sin \omega x$ (gilt auch für $C_1 = 0$ oder $C_2 = 0$)

III $s(x) = C \cdot e^{kx}$
 $\Rightarrow y_p(x) = A \cdot e^{kx}$ falls k nicht Lösung der charakteristischen Gleichung
 $\Rightarrow y_p(x) = Ax \cdot e^{kx}$ falls k einfache Lösung der charakteristischen Gleichung
 $\Rightarrow y_p(x) = Ax^2 \cdot e^{kx}$ falls k doppelte Lösung der charakteristischen Gleichung

IV $s(x)$ ist Summe aus I bis III
 $\Rightarrow y_p(x) = \sum y_p(x)$ von I bis III (Superpositionsprinzip)

Verfahren:

1. Wählen eines Lösungsansatzes
2. Bestimmung der Variablen durch Koeffizientenvergleich zwischen der rechten und der linken Seite der Dgl, wobei der Lösungsansatz, bzw die entsprechenden Ableitungen eingesetzt werden müssen.

Bsp. : $y'' + 3y' - 4y = x + 1$

Lsg. der hom. Dgl.: $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-4x}$

part. Lsg. der inhom. Dgl.: $s(x) = x + 1$ (Polynom vom Grad 1 mit $a_0 = 1 \neq 0$)

Somit Ansatz :

$$y_p(x) = a_1 x + a_0$$

$$y'_p(x) = a_1$$

$$y''_p(x) = 0$$

Einsetzen :

$$\begin{aligned}0 + 3a_1 - 4(a_1x + a_0) &= x + 1 \\ \Leftrightarrow -4a_1x + 3a_1 - 4a_0 &= x + 1 \\ \Rightarrow -4a_1 &= 1 \quad \Rightarrow a_1 = -\frac{1}{4} \\ 3a_1 - 4a_0 &= 1 \Rightarrow -\frac{3}{4} - 4a_0 = 1 \quad / + \frac{3}{4} \\ -4a_0 &= \frac{7}{4} \quad /: -4 \\ a_0 &= -\frac{7}{16}\end{aligned}$$

Somit $y_p(x) = -\frac{1}{4}x - \frac{7}{16}$

Insgesamt erhalten wir als allg. Lsg der inhom. Dgl.

$$y(x) = \underbrace{c_1 e^x}_{y_0} + \underbrace{c_2 e^{-4x}}_{y_p} - \frac{1}{4}x - \frac{7}{16}$$