12 Taylor Entwicklung

Bsp:
Die Entwicklung eines Rechnerprogramms zur Darstellung von
- Grundrechenarten (+ , -)
- Grundrechenarten $\left(\cdot \, , \, : \right)$
- spezielle Funktionen (sin x , e^x)

Lösungsprinzip:
Rückführung auf Grundrechenarten durch „gute“, beliebig genaue Näherungswerte.

Betrachtung von Näherungsverfahren:
- Interpolationspolynome:
  Gesucht wird ein Polynom, das an vorgegebenen Stützstellen mit f(x) übereinstimmt. (Lineares Gleichungssystem)

- Ausgleichspolynome:
  Gesucht wird ein Polynom, für das die Summe der Fehlerquadrate an den Stützstellen minimal wird.

- Tschebyscheff Polynome:
  Gesucht wird ein Polynom, für das die maximale Abweichung von f(x) minimal wird.

- Taylor Polynome:
  Gesucht wird ein Polynom, das an einer Stelle x_0 mit dem Funktionswert und den Ableitungen $f^{(i)}\left(x_0\right)$ mit i = 1, 2, ... ,n (n möglichst groß) übereinstimmt.

Idee: Darstellung von f(x) (sin x ; e^x) durch Grundrechenarten d.h. durch eine Reihe.

Bsp: Geometrische Reihe

$f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ wird dargestellt durch $1 + x + x^2 + \ldots + x^n$

bzw. durch:

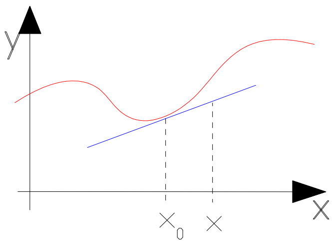
$$S_n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \sum_{i=0}^{n} x^i$$

stellt beliebig guten Näherungswert dar, für $|x| < 1$ und könnte im Rechner implementiert werden.

Klar: Lösung in diesem Beispiel ist direkt möglich, da nur Grundrechenarten erforderlich.

Entwicklung von f(x) in Potenzreihe (Mac Laurin - Reihe)

Gegeben ist eine beliebig oft differenzierbare Funktion f(x)



Betrachte Stelle x_0
Gesucht f(x)

Lineare Näherung liefert Näherungswert für f(x)

Lineare Näherung:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0)$$

Betrachte speziell: $x_0 = 0$

Ziel:

$$f(x) = \underbrace{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots}_{\text{Potenzreihe}} = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

Frage : $a_i = ?$
Idee: Verwendung der Ableitung:
$\Rightarrow$ Gleichungssystem (Lösung gibt a_i)

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \ldots$$
$$f''(x) = 1\cdot 2a_2 + 2\cdot 3a_3x + 3\cdot 4a_4x^2 + \ldots$$
$$f'''(x) = 1\cdot 2\cdot 3a_3 + 2\cdot 3\cdot 4a_4x + \ldots$$

Stelle $x_0 = 0$ einsetzen:

$$f(0) = a_0 = (0!)a_0 \quad \Rightarrow a_0 = \frac{f(0)}{0!}$$
$$f'(0) = a_1 = (1!)a_1 \quad \Rightarrow a_1 = \frac{f'(0)}{1!}$$
$$f''(0) = 1\cdot 2a_2 = (2!)a_2 \quad \Rightarrow a_2 = \frac{f''(0)}{2!}$$
$$f'''(0) = 1\cdot 2\cdot 3a_3 = (3!)a_3 \Rightarrow a_3 = \frac{f'''(0)}{3!}$$

Allgemein:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Zusammenfassung (Mac Laurin - Reihe):
Gegeben sei eine beliebig oft differenzierbare Funktion f(x) (Ableitungen müssen berechenbar sein !!). Dann gilt folgende Darstellung dieser Funktion:

$$\boxed{f(x) = \frac{f(0)}{0!} + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(0)}{i!}x^n}$$

Anmerkung:

Diese Darstellung kann nur verwendet werden, wenn die Reihe konvergiert, dies gilt <u>nicht</u> für jede Funktion und beliebige x.
Vielmehr gilt obige Darstellung nur für „gewisse“ Funktionen und dann für alle x mit $|x| <$ Konvergenzradius. In diesen Fällen haben wir eine für den Rechner geeignete Darstellung f(x) (d.h. Rückführung auf Grundrechenarten).

Bsp:

Mac Laurin - Reihe für $f(x) = e^x$

$$f^{(n)}(x) = e^x$$

$$f^{(n)}(0) = e^0 = 1$$

$$\Rightarrow e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

Die Reihenentwicklung gilt für alle x (d.h. $|x| \le \infty$ Konvergenzradius)
Analog erhalten wir

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}$$

Ziel:

Erstellung eines Programms für e^x

1. Eingabe (E)

x {Stelle, an der e^x berechnet werden soll}
N {Anzahl der Reihenglieder + 1 $\Rightarrow$ Genauigkeit des Näherungswerts}

2. Verarbeitung (V)

Näherungswert: $S_n = \sum_{i=0}^{N} \frac{x_i}{i!}$

d.h. Schleife beginnt bei i = 0

$$S_n = S_n + \frac{x_i}{i!}$$

endet bei N

3. Ausgabe (A)

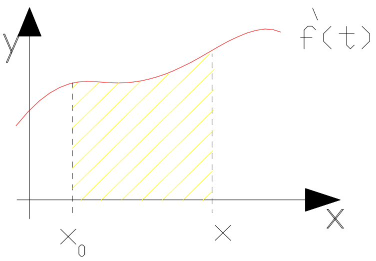
Näherungswert S_n

```
110    REM Mac Laurin - Reihe  der e-Funktion     Version 1
120    REM Eingabe
130    INPUT ‘’ Argument x :“,x
140    INPUT ‘’Anzahl der Reihenglieder n :“,n
150    REM Verarbeitung
160    FOR i = 1 TO n
170    IF i = 0 THEN nfakt = 1
180    IF i > 0 THEN nfakt = nfakt*i
190    IF i = 0 THEN xhochi = 1
200    IF i > 0 THEN xhochi = xhochi*x
210    Sn=Sn+xhochi/nfakt
220    NEXT i
230    REM Ausgabe
240    PRINT ‘’e hoch“,x,‘’ = ‘’,Sn

110    ....            Version 2
170    IF i = 0 THEN an = 1
180    IF i > 0 THEN an = (an*x)/i       {Führt nicht zum Speicherüberlauf !!}
210    Sn = Sn + an
```

Taylor - Reihe

f(x) sei im Intervall $[x_0,x]$ beliebig oft differenzierbar.



$$I(x) = \int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt = f(x) - f(x_0)$$

$$\Rightarrow f(x) = f(x_0) + I(x)$$

$$= f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt \qquad (*)$$

x_0 ist fest
x ist variabel

Wir betrachten I(x) :
Ziel:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

Frage : Wie erhält man aus (*) den Term $(x - x_0)^n$?
Überlegung zur partiellen Integration:

$$\int \underset{u}{x^n} \underset{v'}{\cos x} = \underset{u}{x^n} \underset{v}{\sin x} + \int n_0 \underset{u'}{x^{n-1}} \underset{v}{\sin x}$$

$$\int \underset{v'}{x^n} \underset{u}{\cos x} = \underset{v}{x^{n+1}} \underset{u}{\cos x} - \int \frac{1}{n+1} \cdot \underset{v}{x^{n+1}} \underset{u'}{\sin x}$$

Exponent geht gegen 0
$x_0 = 1$
Exponent steigt um 1

$$I(x) = \int_{x_0}^{x} f'(t)\ dt = \int_{x_0}^{x} \underbrace{f'(t)}_{u} \cdot \underbrace{(x-t)^0}_{v'}\ dt \qquad u' = f''(x),\quad v = -(x-t)^1$$

$$= \left[f'(x)\cdot\left(-(x-t)^1\right)\right]_{x_0}^{x} - \int_{x_0}^{x} f''(t)\cdot\left(-(x-t)^1\right)\ dt$$

$$= f'(x_0)\cdot(x-x_0) + \int_{x_0}^{x} f''(t)\cdot(x-t)^1\ dt \qquad u' = f'''(x),\quad v = -\frac{1}{2}(x-t)^2$$

$$= f'(x_0)(x-x_0) + \left[f''(t)\cdot\left(-\frac{1}{2}(x-t)^2\right)\right]_{x_0}^{x} - \int_{x_0}^{x} f'''(t)\cdot\left(-\frac{1}{2}(x-t)^2\right)dt$$

$$= f'(x_0)\cdot(x-x_0) + f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2} - \int_{x_0}^{x} f'''(t)\cdot\left(-\frac{1}{2}(x-t)^2\right)\ dt$$

<u>Zusammenfassung:</u>

Die Taylor - Entwicklung einer Funktion um den Entwicklungspunkt x_0 ist:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}\cdot(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n + R_n(x)$$

Falls:

$R_n(x) \to 0 \quad (n \to \infty)$, dann wird die Funktion f(x) durch die Taylor - Reihe dargestellt: d.h.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n$$

Spezialfall $x_0 = 0$ => Mac Laurin - Reihe !

Bsp.: f(x)=lnx
Da ln x für x = 0 nicht definiert ist, kann keine Entwicklung mit Mac Laurin erfolgen.
Bestimmen Taylor Reihe von f(x) = ln x um $x_0 = 1$

Bestimmung der Ableitungen

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \ln x & f(1) &= \ln 1 = 0 \\
f'(x) &= x^{-1} & f'(1) &= 1 \\
f''(x) &= (-1)\cdot x^{-2} & f''(1) &= -1 \\
f'''(x) &= (-1)\cdot(-2)\cdot x^{-3} & f'''(1) &= (-1)\cdot(-2) \\
f^{(4)}(x) &= (-1)\cdot(-2)\cdot(-3)\cdot x^{-4} & f^{(4)}(1) &= (-1)\cdot(-2)\cdot(-3) \\
&\vdots & &\vdots \\
f^{(n)}(x) &= (-1)\cdot(-2)\cdot(-(n-1))\cdot x^{-n} & f^{(n)}(1) &= (-1)\cdot(-2)\ldots(-(n-1)) \\
&= (-1)^{(n-1)}\cdot(n-1)!\ \cdot x^{-n}
\end{aligned}
$$

Somit

$$\ln x = \frac{1}{1!}(x-1)^1 + \frac{(-1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{(-1)\cdot(-2)}{3!}(x-1)^3 + \frac{(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)}{4!}(x-1)^4\ldots$$

$$= \frac{x-1}{1} - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \ldots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{(x-1)^n}{n}$$

die Reihe konvergiert für $0 < x \le 2$

Approximation [Annäherung] einer Funktion durch Polynome

Gegeben sei eine beliebig oft differenzierbare Funktion f(x), die durch ein Polynom vom Grad n angenähert werden soll.

Lösung:
Entwicklung von f(x) [z.B. an der Stelle x0] in Mac Laurin - Reihe

$$f(x) = \underbrace{f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\cdot x + \frac{f''(0)}{2!}\cdot x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n}_{\text{ist Polynom von Grad n}} + \underbrace{\ldots\ldots}_{R_n(x)}$$

$$\Rightarrow f(x) = f_n(x) + \underbrace{R_n(x)}_{\text{Fehler}}$$

Wie groß ist der Fehler ?

Restgliedabschätzung von Lagrange:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi \cdot x)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1} \qquad (0 < \xi < 1)$$

Bsp:

$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ \dots\ + \frac{x^n}{n!} + \dots.$$

$$\Rightarrow e^x \approx f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!}$$

Fehlerabschätzung:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi \cdot x)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}$$

$$= \frac{e^{(\xi x)}}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}$$

Speziell: $x = 1$

$$e^1 \approx \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} = f_n(1)$$

Fehler:

$$R_n(x) = \frac{e^{(\xi 1)}}{(n+1)!} \cdot 1^{n+1}$$

$$\frac{e}{(n+1)!} 1^{n+1} < \frac{3}{(n+1)!}$$

$n = 5$

$$e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} = 2{,}717$$

$$\text{Fehler} < \frac{3}{6!} = 0{,}0042$$

Integration von Potenzreihen:

Satz: Jede konvergente Potenzreihe darf im Konvergenzbereich gliedweise integriert werden:

d.h. Sei $P(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ für $x \in [a,b]$ (konvergent !)

$$\Rightarrow \int_c^d P(x)dx = \int_c^d \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i dx = \sum_{i=0}^{\infty} \int_c^d a_i x^i dx$$

falls $a \le c \le d \le b$

Bsp.:

$$\int_0^1 e^x \; dx = \int_0^1 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \; dx = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \int_0^1 x^i \; dx = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \left[\frac{x^{i+1}}{i+1} \right]_0^1$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \left[\frac{x^{i+1}}{(i+1)!} \right]_0^1 = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots = e^1 - 1 = e^1 - e^0$$