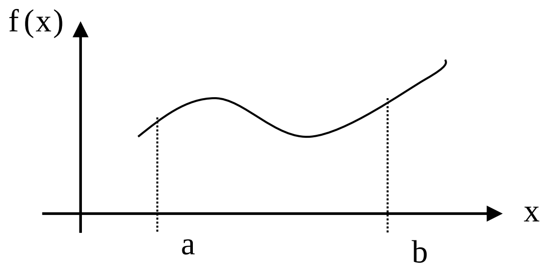
6. Integralrechnung

6.1. Grundlagen

6.1.1. Das bestimmte Integral als Flächeninhalt

Gegeben sei f(x) mit f(x)>0 auf Intervall [a,b]



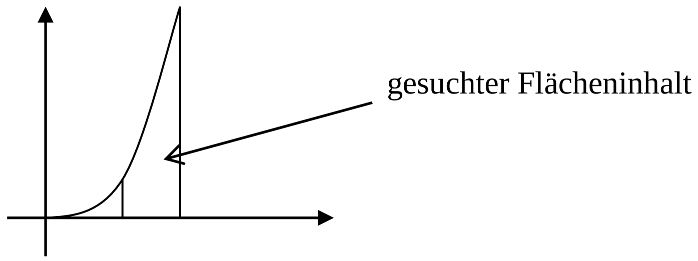
Gesucht:
Flächeninhalt der von den Intervallgrenzen a und b von der Funktionskurve f(x) und von der x-Achse bestimmten Fläche

Genauer: Gesucht ist ein Rechenverfahren

Lösungsansatz: Wähle einfaches Bsp.:

$$f(x) = x^2; \; a = 1 \; \; b = 2$$

Skizze:

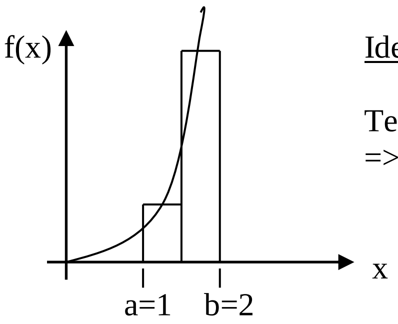


Lösungsidee:

1. Bestimmung eines Näherungswertes und verbessern des Näherungswertes
2. Der Grenzwert des Näherungswertes soll exaktes Ergebnis liefern

(siehe: Bestimmung der Ableitung einer Funktion)

1.Bestimmung eines Näherungswertes und verbessern des Näherungswertes



Idee: Verwende Rechtecke

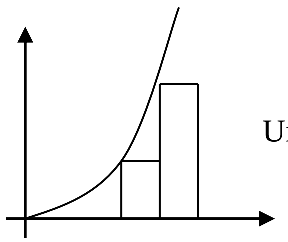
Teile Abszisse (x-Achse) in n gleiche Teile
=> Breite des Rechteckes

Problem: Was ist die richtige Höhe?

Klar: Kleinster Funktionswert $\leq$ Höhe $\leq$ größter Funktionswert

Wähle zwei unterschiedliche Ansätze:

1.Ansatz: Untersumme
d.h. als Höhe wird kleinster Funktionswert in dem betreffenden Intervall verwendet



Untersumme

Für $f(x) = x^2$ in $[1,2]$ erhalten wir

$n = 2$ Teile :

$$U_2 = \frac{(2-1)}{2} \cdot f(1) + \frac{(2-1)}{2} \cdot f(1{,}5)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (f(1) + f(1{,}5)) = \frac{1}{2} \cdot (1 + (1{,}5)^2) = 1{,}625$$

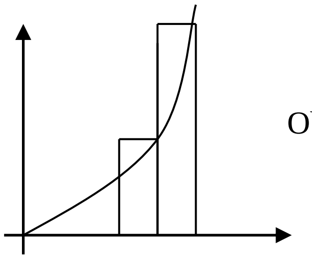
$n = 5$ Teile :

$$U_5 = \frac{2-1}{5}(f(1) + f(1{,}2) + f(1{,}4) + f(1{,}6) + f(1.8)) = 2{,}04$$

Je feiner die Aufteilung des Intervalls [a,b] auf der x-Achse wird, desto größer wird die Untersumme

Klar ist: Die Untersumme ist kleiner und im Grenzfall höchstens gleich dem Flächeninhalt

<u>2.Ansatz:</u> Obersumme
d.h. als Höhe wird der größte Funktionswert in dem betreffenden Intervall verwendet.



Obersumme

Für $f(x) = x^2$ in $[1,2]$ erhalten wir

$n = 2$ Teile

$$O_2 = \frac{(2-1)}{2} \cdot \left(f(1{,}5) + f(2)\right) = 3{,}125$$

$$= \frac{(2-1)}{5} \cdot \left(f(1{,}2) + f(1{,}4) + f(1{,}6) + f(1.8) + f(2)\right) = 2{,}64$$

<u>Klar ist</u>: Die Obersumme ist größer und im Grenzfall höchstens gleich dem Flächeninhalt. Je feiner die Aufteilung des Intervalls [a,b] auf der x-Achse wird, desto kleiner wird die Obersumme.

<u>Zusammenfassend:</u>

Untersumme $\leq$ Flächeninhalt $\leq$ Obersumme

↑ monoton steigend — ↑ monoton fallend

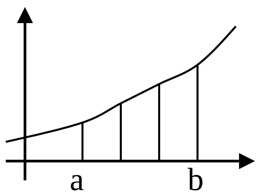
<u>3. Grenzwert</u>
" Experimentell:"

$$U_2 = 1{,}625$$
$$U_5 = 2{,}04$$
$$U_{100} = ?$$

<u>Programm zur Berechnung der Untersumme</u>

<u>**1.Analyse** (Was ist zu tun?)</u>
Sei f(x) auf dem Intervall [a,b]stetig und monoton wachsend.
Das Intervall wird in n gleiche Teile zerlegt mit der Breite:

$$h = \frac{b-a}{n}$$



Berechnung der Untersumme:

$U_n =$ Summe der Rechtecke
pro Rechteck wird der Funktionswert an der linken Seite genommen (da monoton wachsend) und mit der Breite h

2. Design

$$\begin{aligned} U_h &= h\cdot f(a) + h\cdot f(a+1\cdot h) + \ldots + h\cdot f(a+2h) + \ldots h\cdot f(a+(h-1)\cdot h) \\ &= h\cdot (f(a) + f(a+1\cdot h) + f(a+2\cdot h) + \ldots f(a+(n-1)\cdot h) \\ &= h\cdot \sum_{i=0}^{n-1} f(a+i\cdot h) \end{aligned}$$

$$U_h = \left(\frac{b-a}{n}\right)\cdot \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i\frac{(b-a)}{n}\right)$$

BASIC-Programm

Programm besteht aus Zeilen
Zeile besteht aus "Zeilennummer Befehl"

Befehle:

REM ⇔ Kommentarzeile
Bsp.: 10 REM Text

INPUT Variable ⇔ Eingabe
Bsp.: 100 INPUT x
verlangt vom Benutzer Eingabe eines Wertes der in der Variablen x abgelegt wird.

PRINT ⇔ Ausgabe
Bsp.: 200 PRINT " Wert "; x
Es wird der Text " Wert " und der Wert der Variablen x ausgegeben.

Bsp.:

```
150 RUN *** Ein-Ausgabebeispiel ***
200 INPUT " Eingabe "; A
205 PRINT " Eingabewert war "; A
210 END
```

Abarbeiten des Programms erfolgt Zeile für Zeile, wobei innerhalb einer Zeile ein Sprungbefehl in eine andere Zeile gegeben werden kann.

Zuweisung: =
Bsp.: 15 A= 5
Der Variablen A wird der Wert 5 zugewiesen.
(nicht das = der Mathematik)

Schleife:

```
FOR  Variable = Startwert TO Endwert
....     Schleifenkörper
....
NEXT Variable
```

Bsp.:

```
100 FOR I=1 TO 3
110 PRINT I
120 Next I
130 ...
```

1. Durchlauf I=1 Ausgabe: 1 Zeile 120 I um 1 erhöhen
2. Durchlauf I=1+1=2 Ausgabe: 2 ...
3. Durchlauf I=3 Ausgabe: 3 Weiter mit Zeile 130 da Endwert erreicht

Rechenoperatoren:

- \+ Addition
- * Multiplikation
- – Subtraktion
- / Division
- ^ Exponent

Bsp.:

```
A= ( 4+5 ) * ( 3-1 ) / 2
A = 2^3
```

```
1040  REM ******** Berechnung der Untersumme *********
1060  A=1
1070  B=2
1080  INPUT “Anzahl Unterteilungen: “;N
1090  usumme =0
1100  FOR  i=0 TO  N-1
1110  usumme = usumme + (A + i * (B – A) / 2) ^ 2
1120  NEXT  i
1130  usumme = usumme * (B – A) / N
1140  PRINT „“Untersumme : „“; usumme; “ bei “; N;“ Unterteilungen“
```

Berechnung einiger Unter- und Obersummen:

$$U_{100} = 2{,}31835$$

$$U_{100000} = 2{,}333325$$

$$O_2 = 3{,}125$$

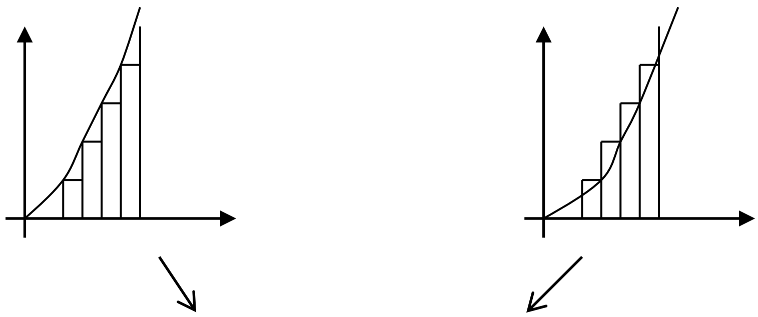
$$O_5 = 2{,}64$$

$$O_{100} = \frac{(2-1)}{100} \cdot \left(f\left(1+1\cdot\frac{2-1}{100}\right) + f\left(1+2\cdot\frac{2-1}{100}\right) .... + f\left(1+100\cdot\frac{2-1}{100}\right)\right)$$

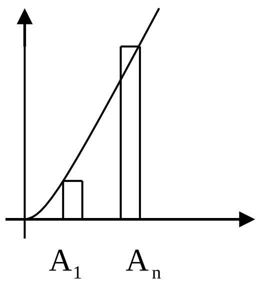
$$= 2{,}34835$$

$$Q_{100000} = 2{,}333355$$

Konvergieren Untersumme und Obersumme gegen denselben Grenzwert?



Obersumme - Untersumme



$$O_n - U_n = A_n - A_1 \to 0$$

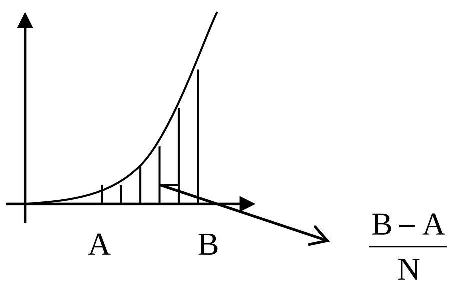
für $n \to \infty$ gilt $A_1 \to 0$, $A_n \to 0$ $\Rightarrow A_n - A_1 \to 0$

Somit $\lim\limits_{n\to\infty} O_n = \lim\limits_{n\to\infty} U_n =$ gesuchte Fläche

Frage: Was ist der exakte Grenzwert?

<u>Exakte Berechnung des Grenzwertes</u>

Funktion : $f(x) = x^2$
Intervall: [A,B] mit 0 < A < B



N = Unterteilungen

Untersumme:

$$U_N = \frac{B-A}{N}\cdot\left(f(A)+f\left(A+1\cdot\frac{B-A}{N}\right)+f\left(A+2\cdot\frac{B-A}{N}\right)....+f\left(A+(N-1)\cdot\frac{B-A}{N}\right)\right)$$

$$O_N = \frac{B-A}{N}\cdot\left(f\left(A+1\cdot\frac{B-A}{N}\right)+f\left(A+2\cdot\frac{B-A}{N}\right)....+f\left(A+N\cdot\frac{B-A}{N}\right)\right)$$

für [A, B] = [1, 2] erhalten wir B – A = 1

$$U_N = \frac{1}{N}\cdot\left(f(1)+f\left(1+\frac{1}{N}\right)+f\left(1+\frac{2}{N}\right)....+f\left(1+\frac{N-1}{N}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{N}\cdot\left(1^2+\left(1^2+2\cdot\frac{1}{N}+\frac{1}{N^2}\right)+\left(1^2+2\cdot\frac{2}{N}+\frac{4}{N^2}\right)....+\left(1+2\cdot\frac{N-1}{N}+\frac{(N-1)^2}{N^2}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{N}\cdot\left(N+2\cdot\left(\frac{1}{N}+\frac{2}{N}+...+\frac{N-1}{N}\right)+\frac{1}{N^2}+\frac{4}{N^2}+...+\frac{(N-1)^2}{N^2}\right)$$

$$=\frac{1}{N}\cdot\left(N+\frac{2}{N}\cdot(1+2+...+N-1)+\frac{1}{N^2}(1+4+...+(N-1)^2)\right) \qquad (*)$$

Wir benötigen:

$$1+2+3+...+N-1=\frac{1+(N-1)}{2}\cdot(N-1)=\frac{N}{2}\cdot(N-1)$$

$$1+4+9+...+(N-1)^2=\frac{(N-1)\cdot N\cdot(2N-1)}{6}$$

(*) =>

$$U_N = \frac{1}{N}\cdot\left(N+\frac{2}{N}\cdot\frac{N}{2}\cdot(N-1)+\frac{1}{N^2}\cdot\frac{N\cdot(N-1)\cdot(2N-1)}{6}\right)$$

$$=1+\frac{N-1}{N}+\frac{N\cdot(N-1)\cdot(2N-1)}{N^3\cdot 6}$$

$$=1+\frac{N-1}{N}+\frac{2N^3-N^2+N}{6N^3}$$

Nebenrechnung:

$$N\cdot(N-1)\cdot(2N-1)=(N^2-N)\cdot(2N-1)$$

$$=2N^3-2N^2-N^2+N=2N^3-N^2+N$$

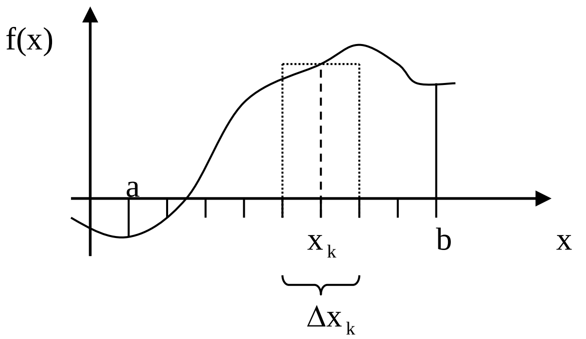
$$U_N = 1+\frac{N-1}{N}+\frac{2N^3}{6N^3}-\frac{N^2}{6N^3}+\frac{N}{6N^3}$$

d.h. für jedes N können wir den Wert U_N nach obiger Formel berechnen,
$\{U_N\}$ ist somit eine Folge.
Der gesuchte Grenzwert ist der Grenzwert dieser Folge
(da Grenzwert Untersumme = Fläche = Grenzwert Obersumme).

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty} U_N &= \lim_{N\to\infty} \cdot \left(1+\frac{N-1}{N}+\frac{2N^3}{6N^3}-\frac{N^2}{6N^3}+\frac{N}{6N^3}\right)\\ &= 1+1+\frac{2}{6}-0+0 = 2+\frac{1}{3}=\frac{7}{3}=2,\overline{3}\end{aligned}$$

6.1.2 Analytische Definition des best. Integrals

Sei f(x) stetig im Intervall [a, b]



$\int_a^b f(x)dx = ?$ (Lese : Integral von a bis b f(x) dx)

1. Zerlegung des Intervalls [a, b] in n Teilintervalle mit den Längen $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \ldots, \Delta x_n$
2. Pro Teilintervall k wird wie folgt verfahren :
   - Wähle beliebigen Punkt x_k aus dem Intervall
   - Berechne $f(x_k)$
   - Berechne Produkt $f(x_k)\cdot\Delta x_k$
3. Summiere die Beträge aller Teilintervalle auf

$$\begin{aligned}S_n &= f(x_1)\cdot\Delta x_1 + f(x_2)\cdot\Delta x_2 + \ldots + f(x_n)\\ &= \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\cdot\Delta x_k\end{aligned}$$

4. Betrachte Grenzwert $\lim_{n\to\infty} S_n$

Falls f(x) in [a, b] stetig ist und $\Delta x_k \to 0$ für $n \to \infty$ dann existiert der Grenzwert und ist unabhängig von der Wahl spezieller Punkte x_k

Def.:

Unter dem bestimmten Integral einer stetigen Funktion f(x) im Intervall [a, b] wird der Grenzwert der Summe S_n für $n \to \infty$ verstanden, wobei $\Delta x_n \to 0$ ($n \to \infty$).

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta x_k$$

Anm.:

1) Falls f(x) stetig ist, existiert der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_n)\,\Delta x_k$ unabhängig von der Definition der Δx_k und der Zwischenpunkte und ist für alle Folgen S_n gleich.

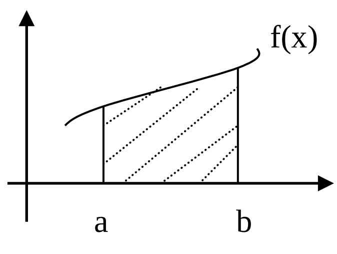
2) Anschauliche Interpretation der Symbolik :

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_a^b f(x)dx$$

"$\int$" - Zeichen = verstümmeltes $\sum$ - Zeichen, das die" Breite" dx und der Höhe f(x) aufsummiert.

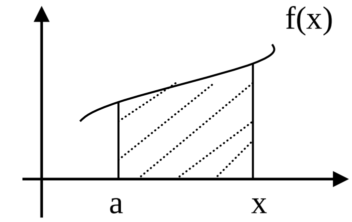
6.1.3 Unbestimmtes Integral

Bestimmtes Integral:



$$F(x) = \int_a^b f(x)\,dx \quad \leftarrow \text{ist eine reele Zahl}$$

Unbestimmtes Integral:



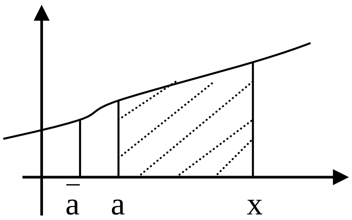
$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad \leftarrow \text{Funktion von } x$$

d.h. a ist fest und x ist variabel

Unter dem unbestimmten Integral der Funktion $f(t)$ verstehen wir die Funktion $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ wobei vorausgesetzt ist, daß für jedes feste x das $\int_a^x f(t)\,dt$ existiert.

Sei $f(t)$ stetig gegeben. Wir betrachten $\int_a^x f(t)dt$. Was passiert, wenn als Untergrenze $\bar{a}$ statt a gewählt wird?

$$F_a(x) = \int_a^x f(t)dt \qquad F_{\bar{a}}(x) = \int_{\bar{a}}^x f(t)dt$$



$$F_{\bar{a}}(x) = \int_{\bar{a}}^x f(t)dt = \underbrace{\int_{\bar{a}}^a f(t)dt}_{\text{Konstante}} + \int_a^x f(t)dt$$

d.h. $F_{\bar{a}}(x) = \text{Konstante} + F_a(x)$

Zusammenfassung:
Zu jeder stetigen Funktion f(t) gibt es unendlich viele unbestimmte Integrale.
Die Differenz zweier unbestimmter Integrale (das sind zwei Funktionen) ist eine Konstante.