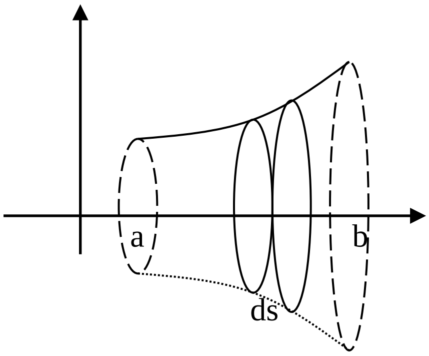
7.3.3. Mantelfläche eines Rotationskörpers

Rotation um die x-Achse



Die durch Rotation der Funktion f(x) um die x-Achse entstehende Fläche heißt Mantelfläche.

Wir betrachten einen infinitesimal breiten Flächenring mit der Fläche $\mathrm{dM}_{\mathrm{Fx}}$

Mantelfläche $\mathrm{M}_{\mathrm{Fx}} = \int \mathrm{dM}_{\mathrm{Fx}}$

Berechnen von $\mathrm{dM}_{\mathrm{Fx}} : 2\pi \cdot y \cdot ds$

$$\Rightarrow \mathrm{M}_{\mathrm{Fx}} = \int 2\pi \cdot y \cdot ds = \int 2\pi \cdot y \cdot \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\, dx$$

Mantelfläche eines Rotationskörpers bei Drehung um die x - Achse

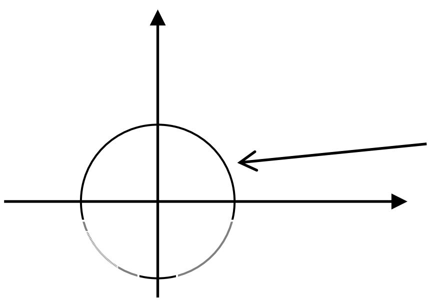
$$\Rightarrow \mathrm{M}_{\mathrm{Fx}} = 2\pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\, dx$$

Mantelfläche eines Rotationskörpers bei Drehung um die y - Achse

$$\Rightarrow \mathrm{M}_{\mathrm{Fy}} = 2\pi \int_{f(a)}^{f(b)} g(y) \cdot \sqrt{1+\left(g'(y)\right)^2}\, dy$$

wobei die Funktion $y = f(x)$ nach x aufgelöst wird in der Form $x = g(y)$

<u>Bsp.:</u> **(1.)** Berechnung der Kugeloberfläche



$$\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \sqrt{\mathrm{r}^2 - \mathrm{x}^2}$$

$$\mathrm{f}'(\mathrm{x}) = \frac{-\mathrm{x}}{\sqrt{\mathrm{r}^2 - \mathrm{x}^2}}$$

$$\sqrt{1+\left(\mathrm{f}'(\mathrm{x})\right)^2} = \frac{\mathrm{r}}{\sqrt{\mathrm{r}^2 - \mathrm{x}^2}}$$

Rotation um die x-Achse

Somit :

$$O_{Kugel} = 2\cdot 2\pi\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\cdot\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}dx$$

$$= 4\pi r\int_0^r dx = 4\pi r[x]_0^r = 4\pi r^2$$

(2.)

Gesucht ist die Mantelfläche des durch Rotation der Funktion

$y=\frac{1}{3}\sqrt{x}(3-x)$ um die x - Achse im Intervall $[0,3]$ entstehenden Rotationskörpers.

$$f(x)=\frac{1}{3}\sqrt{x}(3-x)\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}(3-x)+x^{\frac{1}{2}}\cdot(-1)\right)$$

$$=\frac{1}{6}\frac{3-x}{\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{x}}{3}=\frac{3-x-2\sqrt{x}\sqrt{x}}{6\sqrt{x}}$$

$$=\frac{3-3x}{6\sqrt{x}}=\frac{1-x}{2\sqrt{x}}$$

$$M_{Fx}=2\pi\int_0^3\frac{1}{3}\sqrt{x}\cdot(3-x)\cdot\sqrt{1+\frac{(1-x)^2}{4x}}dx$$

$$=\frac{2\pi}{3}\int_0^3\sqrt{x}\cdot(3-x)\cdot\sqrt{\frac{(1+x)^2}{4x}}dx$$

$$=\frac{2\pi}{3}\int_0^3\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{4x}}\cdot(3-x)\cdot(1+x)dx=\frac{2\pi}{3}\frac{1}{2}\int_0^3(3-x)\cdot(1+x)dx$$

$$=\frac{\pi}{3}\int_0^3 3+2x-x^2dx=\frac{\pi}{3}\left[3x+2\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^3$$

$$=\frac{\pi}{3}(9+9-9)=\frac{9\pi}{3}=3\pi$$

2-te Guldin Regel

$$y_S=\frac{\int yds}{s}\Leftrightarrow y_S\cdot S=\int yds \qquad /\cdot 2\pi$$

$$\Leftrightarrow 2\pi\cdot y_S\cdot S=2\pi\int yds=M_{Fx}$$

Somit :

$$M_{Fx}=2\pi\cdot y_S\cdot S$$

Die Mantelfläche eines Rotationskörpers ist gleich der Bogenlänge S mal dem Weg des Bogenschwerpunktes bei der Drehung.

Bsp.: Gesucht ist die Oberfläche eines zylindrischen Kreisringes (Torus).

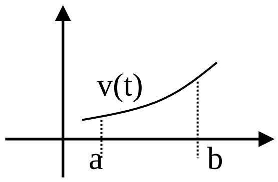
$$\text{Bogenlänge } s \mathrel{\hat{=}} \text{Kreisumfang} = 2\pi r$$
$$\text{Weg des Bogenschwerpunktes} = 2\pi R$$
$$\Rightarrow \text{Mantelfläche} = 2\pi r \cdot 2\pi R = 4\pi^2 r \cdot R$$

7.4. Mittelwerte

7.4.1. Lineare Mittelwerte

Bsp.: Ein Fahrzeug fahre im Intervall $t \in [1,3]$ mit der Geschwindigkeit $v(t) = 1/5\, t^2$.

1. Welchen Weg hat das Fahrzeug in dieser Zeit zurückgelegt ?
2. Was war die durchschnittliche Geschwindigkeit (linearer Mittelwert der Geschwindigkeit).



zu 1.

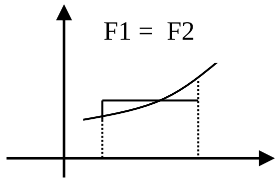
$$s(t) = \int_1^3 v(t)\,dt = \int_1^3 \frac{1}{5} t^2\, dt = \frac{1}{5}\left[\frac{t^3}{3}\right]_1^3 = \frac{1}{5}\left[9 - \frac{1}{3}\right]$$
$$= \frac{1}{5}\,\frac{26}{3} = \frac{26}{15}$$

zu 2.

$$\text{zurückgelegter Weg} = \text{Durchschnittsgeschwindigkeit} \cdot \text{Zeit}$$
$$s(t) = \bar{v}(t) \cdot \text{Zeit}$$
$$\Leftrightarrow \bar{v}(t) = \frac{1}{\text{Zeit}} \cdot s(t) = \frac{1}{b-a}\int_a^b v(t)dt$$
$$\bar{v}(t) = \frac{1}{3-1}\int_1^3 \frac{1}{5} t^2 dt = \frac{1}{3-1} \cdot \frac{26}{15} = \frac{1}{2} \cdot \frac{26}{15} = \frac{13}{15}$$

Allg. Def.:
Der lineare Mittelwert einer Funktion f(x) im Intervall [a,b] ist

$$\boxed{\bar{y}_{\text{linear}} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx}$$



7.4.2. Quadratischer Mittelwert

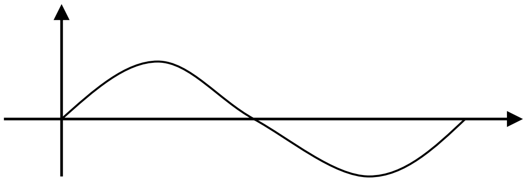
Allg. Def.:
Der quadratische Mittelwert einer Funktion f(x) im Intervall [a,b] ist :

$$\boxed{\bar{y}_{\text{quadr.}} = \sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b f^2(x)\,dx}}$$

Bsp.: Effektivwert für Strom (I)

Gegeben sei $I(t) = I_0 \cdot \sin \omega t$ (sinusförmiger Wechselstrom)

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$



Effektivwert des Stromes : $I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I^2(t)\,dt}$

$$\int_0^T I^2(t)\,dt = I_0^{\,2}\int_0^T \sin^2(\omega t)\,dt = I_0^{\,2}\cdot\frac{1}{2}\int_0^T 1-\cos 2\omega t \;\; dt$$

$$= I_0^{\,2}\cdot\frac{1}{2}\left[t-\frac{1}{2\omega}\sin 2\omega t\right]_0^T = I_0^{\,2}\cdot\frac{1}{2}\left[T-\frac{1}{2\omega}\sin 4\omega\right]$$

$$= I_0^{\,2}\cdot\frac{T}{2}$$

Somit :

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\cdot I_0^{\,2}\,\frac{T}{2}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$$