1. Best. Parabelgleichung: $P(0/10) \Rightarrow 10 = a \cdot 0^2 + b \Rightarrow b = 10$

$P(4/18) \Rightarrow 18 = a \cdot 16 + 10 \Rightarrow a = 0{,}5$

Ansatz: $V = V_{\text{Zylinder}} - V_{Paraboloid}$

$V_Z = \pi \cdot 4^2 \cdot 18 = \pi \cdot 288 \approx 904$

$V_P = \pi \int_{10}^{18} x^2 dy =$ $\qquad y = \frac{1}{2}x^2 + 10$ Auflösen nach x

$x^2 = 2\,(y - 10)$

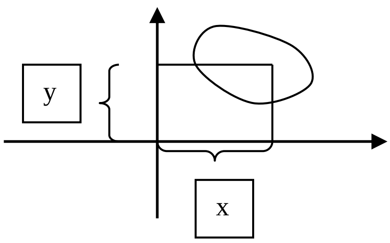
$$V_P = \pi \int_{10}^{18} 2(y-10)\,dy$$

$$= 2\pi \int_{10}^{18} y - 10\,dy = 2\pi \left[\frac{1}{2}y^2 - 10y\right]_{10}^{18} \approx 201$$

$\Rightarrow V \approx 904 - 201 = 703$

7.2.2. Schwerpunkt eines homogenen räumlichen Körpers

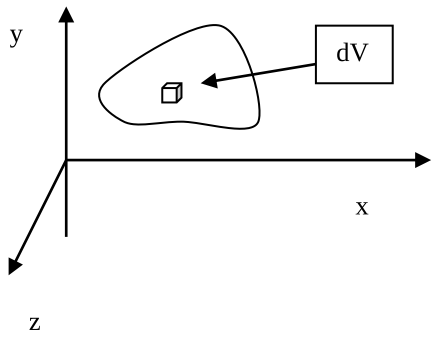
Fläche:



$$x_S = \frac{\int_A x \cdot dA}{A}$$

$$y_S = \frac{\int_A y \cdot dA}{A}$$

Volumen x,y,z-Koordinatensystem



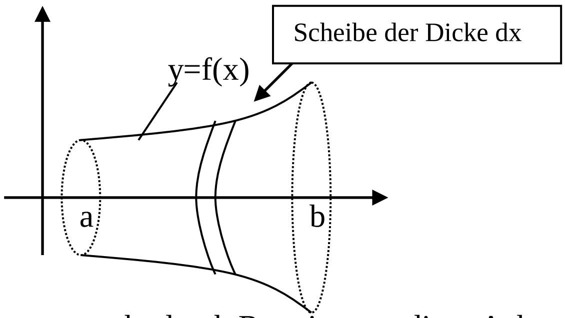
$$x_S = \frac{\int_{(V)} x \cdot dV}{V}$$

$$y_S = \frac{\int_{(V)} y \cdot dV}{V}$$

$$z_S = \frac{\int_{(V)} z \cdot dV}{V}$$

Schwerpunkt eines Rotationskörpers

Rotation um die x-Achse



Körper entsteht durch Rotation um die x-Achse.

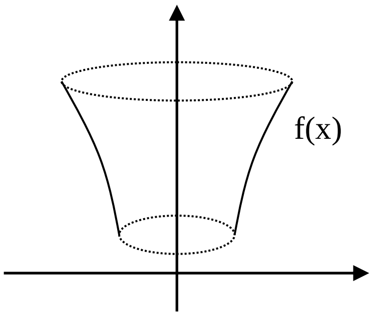
$\Rightarrow z_S = y_S = 0$, d.h. Schwerpunkt liegt auf der x - Achse

$$x_S = \frac{1}{V}\int_{(V)} x \cdot dV \qquad \text{mit } dV = dx \cdot \text{Fläche der Scheibe} = dx \cdot \pi y^2$$

$$= \frac{1}{V}\int_a^b x \cdot \pi \cdot y^2 dx = \frac{\pi}{V}\int_a^b x \cdot y^2 \, dx$$

$$x_S = \frac{\pi}{V}\int_a^b x \cdot \left(f(x)\right)^2 dx$$

Rotation um die y-Achse



Auflösen von y = f(x) nach x = g(y) ergibt

$$y_S = \frac{\pi}{V}\int_{f(a)}^{f(b)} y \cdot g^2(y)\, dy$$

sowie $\quad x_s = z_s = 0 \quad$ wegen Rotationssymmetrie

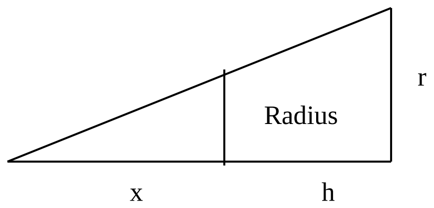
Bsp.:

$$f(x) = \frac{1}{2}x \qquad x \in [0,4]$$

Gesucht : Schwerpunkt bei a.) Rotation um die x-Achse
b.) Rotation um die y-Achse
bei homogener Dichte ρ.

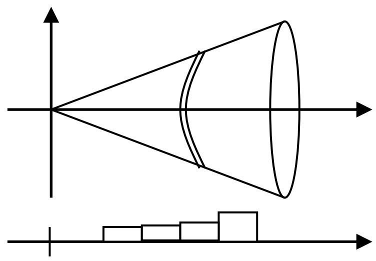
a.) Rotation um die x-Achse

Betrachte allgemeinen Kegel der Höhe h und Grundflächenradius r
Skizze:



$$\frac{Radius}{x} = \frac{r}{h} \Leftrightarrow Radius = \frac{r}{h} \cdot x$$

$$x_S = \frac{\sum Scheibenmasse \cdot x}{Gesamtmasse}$$



$$x_S = \frac{\rho \int_0^h x \cdot (Radius)^2 \cdot \pi \, dx}{\rho \cdot V} = \frac{\pi \int_0^h x \cdot \left(\frac{r}{h} \cdot x\right)^2 dx}{V} \qquad \text{mit } V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$x_S = \frac{\pi \frac{r^2}{h^2} \int_0^h x^3 dx}{\frac{1}{3}\pi r^2 h} = \frac{3}{h^3}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^h = \frac{3h^4}{4h^3} = \frac{3}{4}h$$

d.h. Schwerpunkt liegt 1/4 h über der Grundfläche unabhängig vom Grundflächenradius.
⇒ im obigen Beispiel : x_s=3

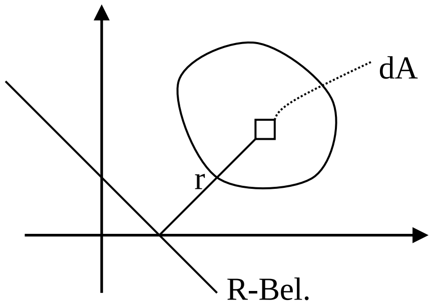
b.) Rotation um die y-Achse

$$h = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2 \Rightarrow y_S = \frac{3}{4} \cdot h = \frac{3}{4} \cdot 2 = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

da Schwerpunkt auf y - Achse ⇒ $x_S = z_S = 0$

7.2.3. Massenträgheitsmoment eines räumlichen Körpers

2-dimensionaler Fall



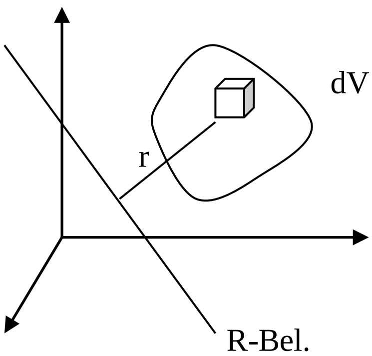
Rotation um bel. Achse R-Bel. :

$$I_{R-Bel} = \int r^2 dA$$

Spezialfälle: 1. R - Bel = y - Achse $\Rightarrow I_y = \int x^2 dA$

2. R - Bel = x - Achse $\Rightarrow I_x = \int y^2 dA$

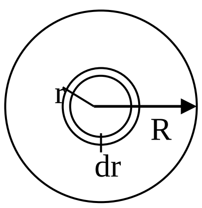
3-dimensionaler Fall (räumlicher Körper)



Rotation um bel. Achse R-Bel. :

$$J_{R-Bel} = \int_{(V)} r^2 dV$$

Bsp.: Gesucht ist das Massenträgheitsmoment einer Kreisscheibe vom Radius R und der Dicke h bzgl. der Symmetrieachse.



$$J = \int_{(V)} r^2 dV$$

Volumen des infinitesimal dünnen Ringes :

$$dV = 2\pi r \cdot h \cdot dr$$

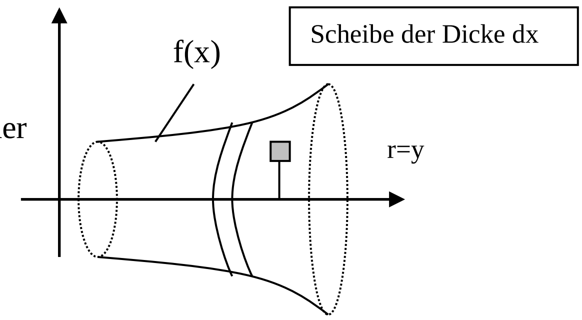
Somit :

$$J = \int_0^R r^2 \cdot 2\pi r \cdot h \, dr = 2\pi h \int_0^R r^3 dr = 2\pi h \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R$$

$$= 2\pi h \left(\frac{R^4}{4} - \frac{0^4}{4} \right) = \frac{1}{2} \pi h R^4$$

<u>Massenträgheitsmoment eines Rotationskörpers</u>

<u>Rotation um die x-Achse</u>



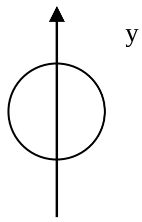
$\Rightarrow$ homogener Rotationskörper der Dichte ρ durch Rotation von f(x) um die x-Achse.

$$J = \int r^2 dm$$

Zerlege den Körper in Scheiben, wobei jede Scheibe den Beitrag dJ_x liefert:

$$J_x = \int dJ_x$$

Berechnung von dJ_x : Sicht $\perp$ zur x - Achse.



$$dJ_x = \rho \frac{1}{2} \pi R^4 dx \qquad (\hat{=} \text{ Kreisscheibe von Radius R und Dicke dx})$$

mit R = f(x)

$$J_x = \int_a^b \rho \frac{1}{2} \pi (f(x))^4 dx = \frac{1}{2} \pi \int_a^b \rho (f(x))^4 dx$$

<u>Rotation um die y-Achse</u>

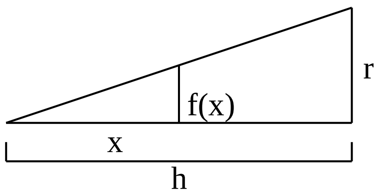
y = f (x) auflösen nach x = g(y)

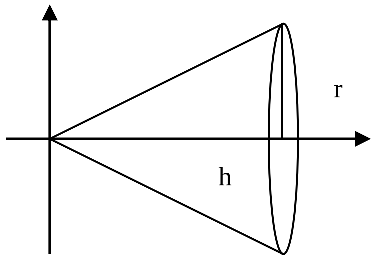
$$\Rightarrow J_y = \frac{1}{2} \pi \int_{f(a)}^{f(b)} (g(y))^4 dy$$

Bsp.:

(1.) Gesucht : Massenträgheitsmoment eines homogenen Kegels mit der Höhe h und den Grundradius r

Betrachte Rotation um x-Achse





$$\frac{f(x)}{x} = \frac{r}{h} \Leftrightarrow f(x) = x\frac{r}{h}$$

Dann :

$$J = J_x = \frac{1}{2}\pi\int_0^h (f(x))^4 dx = \frac{1}{2}\pi\int_0^h \left(\frac{r}{h}\cdot x\right)^4 dx = \frac{1}{2}\pi\frac{r^4}{h^4}\int_0^h x^4 dx$$

$$= \frac{1}{2}\pi\frac{r^4}{h^4}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^h = \frac{1}{2}\pi\frac{r^4}{h^4}\frac{h^5}{5} = \frac{1}{10}\pi r^4 h$$

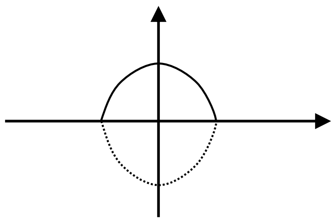
(2.) Gesucht : Massenträgheitsmoment einer Kugel homogener Dichte ρ bei Rotation um eine bel. Achse durch den Schwerpunkt. Schwerpunkt der Kugel = Mittelpunkt.

Rotierende Funktion ?

Halbkreis $\quad f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$

Rotationsachse : Wähle x - Achse

$J_{Kugel} = 2 \cdot J_{Halbkugel}$



$$\Rightarrow J = 2\cdot\frac{1}{2}\pi\int_0^r \rho(f(x))^4 dx = \pi\rho\int_0^r \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^4 dx = \pi\rho\int_0^r \left(r^2 - x^2\right)^2 dx$$

$$= \pi\rho\int_0^r r^4 - 2r^2x^2 + x^4 dx = \pi\rho\left[r^4 x - 2r^2\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right]_0^r$$

$$= \pi\rho\left[r^5 - \frac{2}{3}r^5 + \frac{r^5}{5}\right] = \pi\rho r^5\left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) = \frac{8}{15}\pi\rho r^5$$

Satz von Steiner

Berechnung des Massenträgheitsmomentes bei Rotation des Körpers um eine bel. Achse A.
(Anm.: Der Körper muß kein Rotationskörper sein).

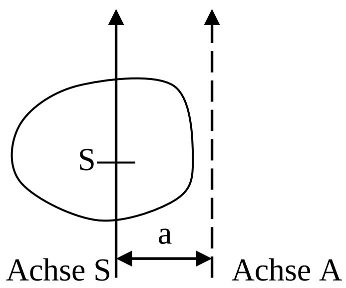
$$J_A = J_S + m \cdot a^2$$

$J_A \mathrel{\hat{=}}$ Massenträgheitsmoment bei Rotation um Achse A

$J_S \mathrel{\hat{=}}$ Massenträgheitsmoment bei Rotation um Achse S
wobei Achse S parallel zur Achse A ist und durch den Schwerpunkt geht.

$m \mathrel{\hat{=}}$ Masse des Körpers

$a \mathrel{\hat{=}}$ Abstand zwischen Achse A und Achse S



<u>Anm.:</u>

$m \cdot a^2 \mathrel{\hat{=}}$ Massenträgheitsmoment der im Schwerpunkt vereinigten Gesamtmasse m bei Rotation um die Achse A im Abstand a

$$r_s^2 = x^2 + y^2$$

$$r_A^2 = (a + x)^2 + y^2 = a^2 + 2ax + x^2 + y^2 =$$

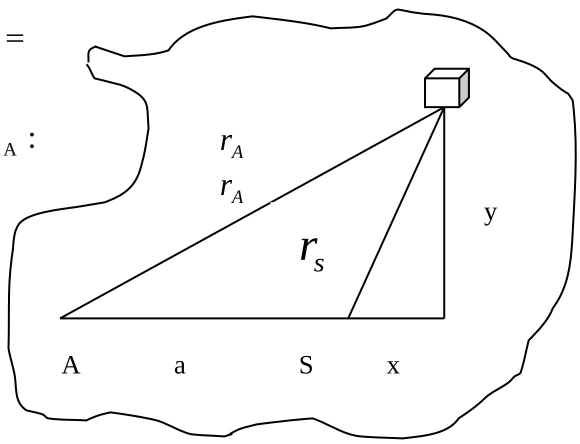
$$= a^2 + 2ax + r_s^2$$

Berechnung Massenträgheitsmoment J_A:

$$J_A = \int_{(m)} r_A^2 dm = \int_{(m)} a^2 + 2ax + r_s^2 dm =$$

$$= \int_{(m)} r_s^2 dm + a^2 \int_{(m)} dm + 2a \int_{(m)} xdm =$$

$$= J_s + a^2 m + 2a \int_{(m)} xdm = J_s + a^2 m$$

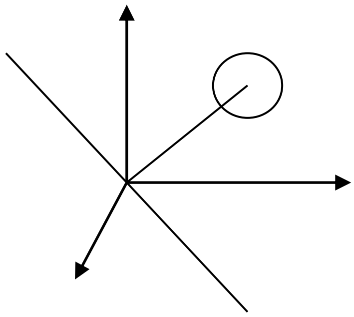


$\int_{(m)} xdm$ = statisches Moment 1.Ord.

= y_s = 0 da als Ursprung des x - y Koordinaten - systems die Schwerpunktkoordinaten gewählt wurden

Bsp.:

(1.) Massenträgheitsmoment einer Kugel vom Radius r
und Mittelpunkt (3 / 3 / 0) bei Rotation um die Gerade y = - x



Satz v. Steiner:

$$J_A = J_S + m \cdot a^2$$

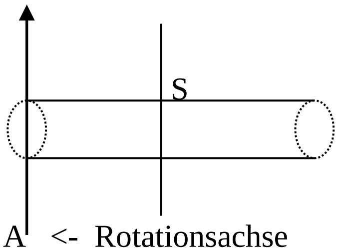
$$J_S = \frac{8}{15}\pi \cdot \rho \cdot r^5$$

$$a^2 = 3^2 + 3^2 \qquad \mathrm{V}_{\text{Kugel}} = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$$

$$\mathrm{m} = \rho \cdot \mathrm{V}_{\text{Kugel}} \Rightarrow J_A = \frac{8}{15}\pi \cdot \rho \cdot r^5 + \rho \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 \left(3^2 + 3^2\right)$$

$$= \rho \cdot \pi \cdot r^3 \left(\frac{8}{15} r^2 + 24\right)$$

(2.) Massenträgheitsmoment eines homogenen zylindrischen Stabes der Länge L bei Rotation um Achse am Endpunkt des Stabes senkrecht zum Stab.



Schwerpunkt bei l/2 genau in der Mitte des Stabes.

Steiner :

$$J_A = J_S + m \cdot a^2$$

$$m = V \cdot \rho = \pi r^2 \cdot L \qquad a = \frac{L}{2} \quad \Rightarrow m \cdot a^2 = m \cdot \frac{L^2}{4}$$

$$J_S = \rho \int_{(V)} x^2 dV \qquad dV \mathrel{\hat{=}} \text{Volumen einer Scheibe derDicke dx}$$

$$dV = \pi \cdot r^2 dx$$

$$\Rightarrow J_S = \rho \cdot 2 \int_0^{\frac{L}{2}} x^2 \pi r^2 dx = \rho \cdot 2\pi r^2 \int_0^{\frac{L}{2}} x^2 dx = \rho \cdot 2\pi r^2 \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{L}{2}}$$

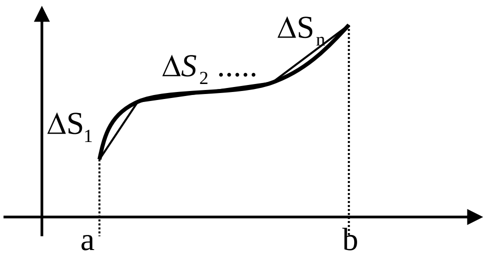
$$= \rho \cdot 2\pi r^2 \frac{L^3}{8 \cdot 3} = \frac{1}{12}\rho \pi r^2 L \cdot L^2 = \frac{1}{12} m \cdot L^2$$

$$\Rightarrow J_A = \frac{1}{12} m \cdot L^2 + m \frac{L^2}{4} = \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4}\right) m \cdot L^2 = \frac{4}{12} m \cdot L^2 = \frac{1}{3} m \cdot L^2$$

7.3. Bogenlängen, Oberflächen von Drehkörpern

7.3.1. Bogenlängen

Gegeben sei die Kurve f(x) auf [a,b], f(x) stetig



Gesucht : Die Länge der Kurve f(x)

Näherungslösung : Wähle n Punkte auf der Kurve, verbinde diese Punkte durch Geraden (Sehnen), dann ergibt die Summe der Sehnenlängen einen Näherungswert.

Im Grenzfall $\lim\limits_{n\to\infty}$ erahlten wir die exakte Lösung.

ΔS_i sei die Länge der i - ten Sehne, S sei die exakte Bogenlänge

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i \qquad \text{mit} \quad \Delta S_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} \quad \text{folgt}$$

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_i)^2 * \left(1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2\right)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \cdot \Delta x_i$$

<u>Grenzwertbetrachtung :</u>

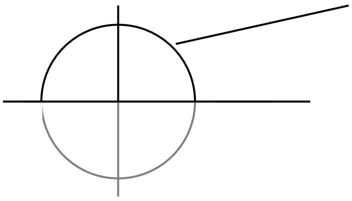
$$\lim_{n\to\infty} \Rightarrow \Delta x_i \to 0$$

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = f'(x) \quad ; \quad \sum_{i=1}^{n} \text{geht über in} \int_a^b$$

Somit

$$S = \int_a^b dS = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx \qquad dS = \sqrt{1 + (f'(x))^2} \quad \text{heißt Bogendifferential}$$

Bsp.: Berechnung des Kreisumfangs



$$U_{Kreis} = 4 \cdot U_{Viertelkreis}$$

$$f(x) = \left(r^2 - x^2\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}\left(r^2 - x^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$U_{Viertelkreis} = \int_0^r \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\,dx = \int_0^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\,dx$$

$$= \int_0^r \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}}\,dx = \int_0^r \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\,dx$$

$$= r\int_0^r \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}}\,dx$$

Substitution : $x = r \cdot \sin u \Rightarrow \frac{dy}{du} = r \cdot \cos u$

$$\Rightarrow dx = r \cdot \cos u \, du$$

$$\sqrt{r^2 - x^2} = \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 u} = r\sqrt{1 - \sin^2 u} = r\sqrt{\cos^2 u} = r \cdot \cos u$$

Grenzen : 0 $\quad 0 = r \cdot \sin u \Rightarrow u = 0$

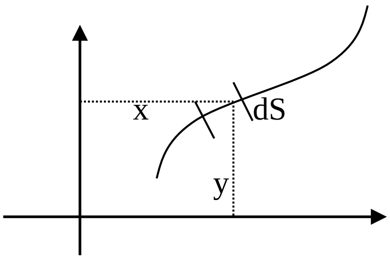
r $\quad r = r \cdot \sin u \Rightarrow 1 = \sin u \Rightarrow u = \frac{\pi}{2}$

Einsetzen :

$$U_{Viertelkreis} = r\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{r \cdot \cos u} r \cdot \cos u \, du = r\int_0^{\frac{\pi}{2}} du = r \cdot [u]_0^{\frac{\pi}{2}} = r \cdot \frac{\pi}{2}$$

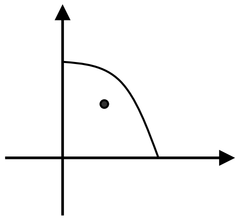
$$\Rightarrow U_{Kreis} = 4 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot r = 2\pi r$$

7.3.2. Schwerpunkt eines Bogens



$$x_S = \frac{\int x \cdot dS}{\int dS} = \frac{M_{yBogen}}{S} \qquad y_S = \frac{\int y \cdot dS}{\int dS} = \frac{M_{xBogen}}{S}$$

Bsp.: Gesucht ist der Schwerpunkt eines Viertelkreises.



Länge der Kurve :

$$\int dS = r\int_0^r \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}}\,dx = \frac{r \cdot \pi}{2}$$

$$x_S: \qquad \int xdS = r\int_0^r \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\,dx = \qquad u = r^2 - x^2$$

$$\frac{du}{dx} = -2x \Leftrightarrow dx = \frac{du}{-2x}$$

$$= r\int \frac{x}{\sqrt{u}}\frac{du}{-2x} = -\frac{r}{2}\int \frac{1}{\sqrt{u}}\,du = -\frac{r}{2}\int (u)^{-\frac{1}{2}}du$$

$$= -\frac{r}{2}\left[2u^{\frac{1}{2}}\right] = -r\left[u^{\frac{1}{2}}\right] = -r\left[\sqrt{r^2 - x^2}\right]_0^r$$

$$= -r\left(\sqrt{0} - \sqrt{r^2}\right) = (-r)\cdot(-r) = r^2$$

$$\Rightarrow x_S = \frac{\int xdS}{\int dS} = \frac{r^2}{\frac{r \cdot \pi}{2}} = \frac{2}{\pi}r$$

Aus Symmetriegründen folgt $y_S = x_S$, d.h. Schwerpunkt liegt auf der Winkelhalbierenden.

Insbesondere: Der Schwerpunkt liegt nicht auf der Kurve, die den Viertelkreis beschreibt.