## 6.1.5. Berechnung bestimmter Integrale

*Bsp.*: $\int_1^2 x^2 dx = ?$

*Stammfunktion*: $\int_a^x x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + c$

*Bestimmung* der Konstanzen c:

$$0 = \int_1^1 x^2 dx = \tfrac{1}{3}\cdot 1^3 + c \iff 0 = \tfrac{1}{3}1^3 + c \iff c = -\tfrac{1}{3}1^3$$

$$\textit{Somit} \quad \int_1^2 x^2 dx = \tfrac{1}{3}\cdot 2^3 - \tfrac{1}{3}1^3 = \tfrac{8}{3} - \tfrac{1}{3} = \tfrac{7}{3}$$

Wichtig: Hierbei wurde zur Bestimmung des Ergebnisses lediglich der Hauptsatz der Differential-Integralrechnung verwendet ("Welche Fkt. muß man ableiten, damit man $f(x) = x^2$ erhält?"), d.h. die langwierige Berechnung von komplizierten Summen (siehe 6.1.1) entfällt!

Allgemein:

*Gesucht*: $\int_a^b f(x)\,dx$

1. Suche eine Stammfkt. F(x), d.h. $F'(x) = f(x)$
   Allg. Stammfkt. hat dann die Darstellung $F(x) + c$
   d.h. $\int_a^x f(x)\,dx = F(x) + c$
2. Bestimme Konstante c:
   $0 = \int_a^a f(x) = F(a) + c \iff c = -F(a)$

Mit $c = -F(a)$ erhalten wir $\int_a^x f(x)\,dx = F(x) - F(a)$

*Das bestimmte Integral* (x = b) wird dann wie folgt berechnet:

$$\underline{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)}$$

*wobei* F(x) Stammfunktion ist (d.h. $F'(x) = f(x)$

Schreibweise: $\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b$

Anm.: In manchen Fällen kann keine Stammfkt. angegeben werden, d.h. es existiert keine Integraldarstellung in geschlossener Form.
Dann: Einsatz von numerischem Verfahren zur Berechnung von Näherungslösungen.

Bsp.:

(1) $\int_1^3 x^3 dx = ?$

Stammfkt.:

$$F(x) = \tfrac{1}{4} x^4$$

Somit: $\int_1^3 x^3 dx = \left[\tfrac{1}{4} x^4\right]_1^3 = \tfrac{1}{4} \cdot 3^4 - \tfrac{1}{4} \cdot 1^4$

$= \tfrac{81}{4} - \tfrac{1}{4} = \tfrac{80}{4} = 20$

(2) $\int_0^{\Pi} \sin x \, dx = ?$

*Stammfkt.*: $F(x) = -\cos x$

Somit: $\int_0^{\Pi} \sin x \, dx = [-\cos x]_0^{\Pi} = (-\cos \Pi) - (-\cos 0)$

$= (1) - (-1) = 1 + 1 = 2$

(3) $\int_{-1}^{0} x^3 dx = ?$

*Stammfkt.*: $F(x) = \tfrac{1}{4} x^4$

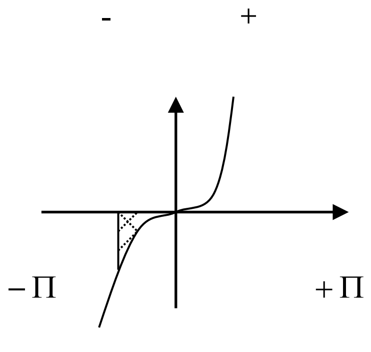
$$\int_{-1}^{0} x^3 dx = [\tfrac{1}{4} x^4]_{-1}^{0} = \tfrac{1}{4} \cdot 0^4 - \tfrac{1}{4}(-1)^4 = 0 - \tfrac{1}{4} = \underline{\underline{-\tfrac{1}{4}}}$$

Integral ist negativ, da Funktionswert negativ!

(4) $\int_1^{0} x^3 dx = ?$

$$\int_1^{0} x^3 dx = [\tfrac{1}{4} x^4]_1^{0} = \tfrac{1}{4} \cdot 0^4 - \tfrac{1}{4}(1)^4 = 0 - \tfrac{1}{4} = -\tfrac{1}{4}$$

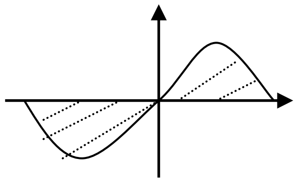
Integral ist negativ, da $\Delta x$ negativ!
( Untergrenze 1, Obergrenze 0 $\Rightarrow \Delta x$ neg. )



(5) $$\int_0^{-1} x^3 dx = [\tfrac{1}{4} x^4]_0^{-1} = \tfrac{1}{4}\cdot(-1)^4 - \tfrac{1}{4}\cdot 0^4 = \tfrac{1}{4}$$

Integral positiv, da $\Delta$x negativ und Funktionswerte negativ!

(6) $$\int_{-\Pi}^{\Pi} \cos x \, dx = [\sin x]_{-\Pi}^{\Pi} = \sin \Pi - \sin(-\Pi) = 0 - 0 = 0$$



Positiver und negativer Anteil heben sich auf.

Zusammenfassend:
Soll statt des Integrals die Fläche bestimmt werden, muß man auf die Vorzeichen achten.

### 6.1.6. Integrationsregeln

Faktorregel:

Bsp.: $$\int_a^b 2\cdot x^2 dx = [2\cdot\tfrac{1}{3}x^3]_a^b = 2\cdot\tfrac{1}{3}b^3 - 2\cdot\tfrac{1}{3}a^3 = 2\cdot\left(\tfrac{1}{3}b^3 - \tfrac{1}{3}a^3\right)$$

$$= 2\cdot\left([\tfrac{1}{3}x^3]_a^b\right) = 2\cdot\int_a^b x^2 dx$$

Allg.: Sei c konstanter Faktor, so gilt:

$$\int_a^b c\cdot f(x)dx = c\cdot\int_a^b f(x)dx$$ (Faktor kann vorgezogen werden)

Summenregel:

$$\int_a^b \cos x + e^x dx = [(\sin x + e^x)]_a^b = (\sin b + e^b) - (\sin a + e^a)$$

$$= [\sin x]_a^b + [e^x]_a^b = \int_a^b \cos x dx + \int_a^b e^x dx$$

Allg.: Eine endliche Summe darf einzeln integriert werden.

$$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx + \ldots + \int_a^b f_n(x)dx$$

Vertauschen der Integrationsgrenzen

$$\int_1^2 \cos x dx = [\sin x]_1^2 = \sin 2 - \sin 1 = -(\sin 1 - \sin 2)$$

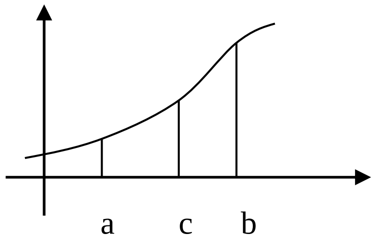
$$= [-(\sin x)]_2^1 = -\int_2^1 \cos x dx$$

*Allg.*: $\underline{\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx}$

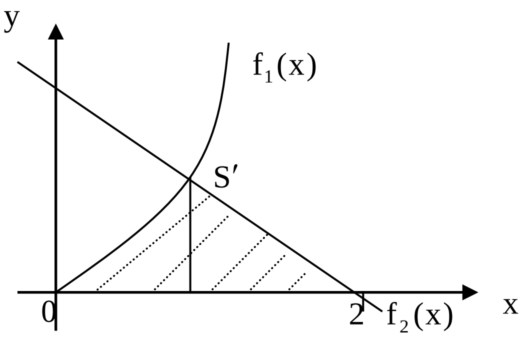
Zerlegung in Teilintervalle

Sei $a < c < b$, dann gilt:

$$\underline{\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx}$$




Bsp.: Gesucht ist die Fläche, die von den Kurven $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = -x + 2$ und der positiven x-Achse eingeschlossen wird.




Berechnung des Schnittpunktes S':

$$x^2 = -x + 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + x - 2 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \qquad x_1 = 1 \qquad x_2 = -2 < 0$$

*Somit*

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 (-x+2)dx$$

$$= [\tfrac{1}{3}x^3]_0^1 + [(-\tfrac{1}{2}x^2 + 2x)]_1^2$$

$$= \tfrac{1}{3}\cdot 1^3 - \tfrac{1}{3}\cdot 0^3 - \tfrac{1}{2}\cdot 2^2 + 2\cdot 2 - (-\tfrac{1}{2}\cdot 1^2 + 2\cdot 1)$$

$$= \tfrac{1}{3} - 0 - 2 + 4 + \tfrac{1}{2} - 2 = \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2} = \tfrac{5}{6}$$

## 6.2 Analytische Integrationsmethoden

- Methoden zur Rückführung komplizierter Integrale auf einfache Integrale

### 6.2.1 Integration durch Substitution

*Bsp.*: $\int x \cdot (\cos x^2) dx = ?$

*Bekannt*: $(\sin x)' = \cos x$

Aber Argument ist $x^2$: $\quad (\sin x^2)' = ? \qquad f(x) = \sin x^2$

*Substitution*: $u = x^2$

*Dann* $\quad f(u) = \sin u \quad u(x) = x^2$

$$f'(x) = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx} \, (\textit{Kettenregel})$$

$$= (\cos u) \cdot 2x = (\cos x^2) \cdot 2x$$

Gesucht ist Fkt. F(x) mit $F'(x) = x \cdot (\cos x^2)$

Lösung: $F(x) = \frac{1}{2} \cdot \sin x^2$

$$F'(x) = (\tfrac{1}{2} \cdot \sin x^2)' = \tfrac{1}{2} \cdot (\sin x^2)'$$

$$= \tfrac{1}{2} \cdot \left(2x \cdot (\cos x^2)\right) = x \cdot \cos x^2$$

Somit: $\int x \cdot (\cos x^2) dx = \frac{1}{2} \cdot \sin x^2 + c$

Ziel: Substitution $u = x^2$ soll direkt im Integral verwendet werden, so daß Lösung des Integrals einfacher dargestellt werden kann.

Substitution: $u = x^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = 2x$

$$\underline{dx = \frac{du}{2x}}$$

Dann: $\int x \cdot (\cos x^2) dx = \int x \cdot \cos u \frac{du}{2x}$

$$= \int \frac{x}{2x} \cdot \cos u \, du = \int \frac{1}{2} \cos u \, du$$

$$= \frac{1}{2} \int \cos u \, du = \frac{1}{2} \sin u + c$$

$$= \frac{1}{2} \sin x^2 + c$$

Zusammenfassung :

1. Aufstellen einer Substitutionsgleichung

$$u = g(x) \qquad \frac{du}{dx} = g'(x) \quad \Leftrightarrow \quad dx = \frac{du}{g'(x)}$$

2. Substitution im Integral

$$f(x)dx = f(x) \cdot \frac{du}{g'(x)} = \frac{f(x)}{g'(x)} du = \varphi(u)\,du$$

$$\downarrow$$

$$= \varphi(u)$$

Wichtig : in $\varphi(u)$ muß die Variable x vollständig durch u ersetzt werden

Dann : $\int f(x)\,dx = \int \varphi(u)du$

3. Berechne $\int \varphi(u) = \Phi(u) + c$

4. Rücksubstitution in $\Phi(u)$ zur Bestimmung der Stammfkt.

$$\int f(x)dx = \Phi(u) + c = \Phi(g(x)) + c = F(x) + c$$

*Anm.*: 4. kann bei Berechnung des bestimmten Integrals entfallen, falls man Integrationsgenzen anpaßt(aber nur dann!).

*Bsp.*:

(1) $\int \frac{\ln x}{x}\,dx = ?$

Substitutionsgleichung : $u = \ln x \qquad \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \quad \Leftrightarrow \quad dx = x \cdot du$

*Substitution im Integral* : $\int \frac{\ln x}{x} dx = \int \frac{u}{x} x \cdot du = \int u\,du$

*Berechnen* : $\int u\,du = \frac{1}{2}u^2 + c$

*Rücksubstitution* : $\frac{1}{2}u^2 = \frac{1}{2}(\ln x)^2$

*Somit* : $\int \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + c$

(2) Berechnen eines bestimmten Integrals durch Substitution

$$\int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx = [\tfrac{1}{2}(\ln x)^2]_1^2$$

$$= \tfrac{1}{2}(\ln 2)^2 - \tfrac{1}{2}(\ln 1)^2 \approx 0{,}24$$

(3) $\int_1^2 4 \cdot (4x - 3)^8 dx = ?$

$u = 4x - 3 \;\Rightarrow\; \frac{du}{dx} = 4 \;\Leftrightarrow\; dx = \frac{du}{4}$

Somit: $\int 4 \cdot (4x - 3)^8 dx = \int 4 \cdot u^8 \frac{du}{4} = \int u^8 du$

$= \frac{1}{9} u^9 + c = \frac{1}{9}(4x - 3)^9 + c$

(4) $\int \sin^5 x \cdot \cos x \, dx = ?$

$u = \sin x \qquad \frac{du}{dx} = \cos x \;\Leftrightarrow\; dx = \frac{du}{\cos x}$

$= \int u^5 \cdot \cos x \frac{du}{\cos x} = \int u^5 du$

$= \frac{1}{6} u^6 + c = \frac{1}{6} \sin^6 x + c$

(5) $\int_0^2 x \cdot x^2 dx = \int_0^2 x^3 dx = \left[\frac{1}{4} x^4\right]_o^2 = \frac{1}{4} \cdot 2^4 = \underline{\underline{4}}$

Alternativ mit Substitution: $u = x^2 \quad \frac{du}{dx} = 2x \;\Leftrightarrow\; dx = \frac{du}{2x}$

$\int x \cdot x^2 dx = \int x \cdot u \frac{du}{2x} = \int \frac{u}{2} du = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} u^2 + c = \frac{1}{4} u^2 + c$

$\int_0^2 x^3 dx = \left[\frac{1}{4} u^2\right]_0^2 = \underline{\underline{1}} \neq \underline{\underline{4}}$ Wieso?

<u>Berücksichtigung der Grenzen bei der Substitution</u>:

Gesucht: $\int_a^b f(x)dx$

Substitution: $u = g(x)$

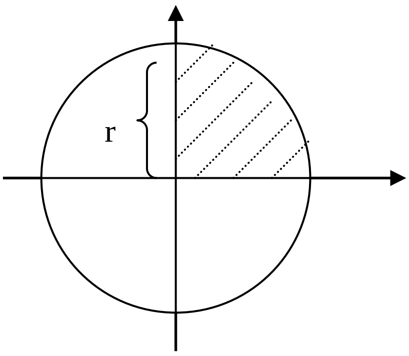
Einsetzen ergibt: $f(x)\,dx = h(u)\,du$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} h(u)\,du$$

d.h. Grenzen müssen substituiert werden!

Alternative: Lsg. des unbestimmten Integrals $\int f(x)dx = ... = F(x)$ und anschließend Lsg. des bestimmten Integrals mit der gefundenen Stammfkt..

(6) Berechnen der Kreisfläche




$f(x) = \sqrt{r^2 - x}$ r = Radius

Kreisfläche = 4 * Fläche im I.Quadranten

Fläche im I.Quadranten : $\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = ?$

*Substitution* : $x = r \cdot \sin u \Rightarrow \frac{dx}{du} = r \cdot \cos u \Leftrightarrow dx = r \cdot \cos u\, du$

$$\int \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = \int \sqrt{r^2 - r^2 \cdot \sin^2 u} \cdot r \cdot \cos u\, dx = \int r \cdot \cos u \cdot r \cdot \cos u\, du$$

$$= \int r^2 \cos^2 u\, du$$

da $\sqrt{r^2 \cdot (1 - \sin^2 u)} = r \cdot \sqrt{1 - \sin^2 u} = r \cdot \cos u$

Betrachtung der Integralgrenzen :

$x = r \cdot \sin u \Leftrightarrow \frac{x}{r} = \sin u \Rightarrow u = \arcsin \frac{x}{r}$

*Untergrenze* : $x = 0 \rightarrow u = \arcsin \frac{0}{r} = 0$

*Obergrenze* : $x = r \rightarrow u = \arcsin \frac{r}{r} = \arcsin 1 = \frac{\Pi}{2}$

*Somit* :

$$\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\Pi}{2}} r^2 \cdot \cos^2 u\, du$$

*Verwenden* : $\cos^2 u = \frac{1}{2}(1 + \cos 2u)$

$$r^2 \int_0^{\frac{\Pi}{2}} \cos^2 u\, du = \frac{r^2}{2} \int_0^{\frac{\Pi}{2}} (1 + \cos 2u)\, du = \frac{r^2}{2} \int_0^{\frac{\Pi}{2}} du + \frac{r^2}{2} \int_0^{\frac{\Pi}{2}} \cos 2u\, du$$

$$= [\frac{r^2}{2} u]_0^{\frac{\Pi}{2}} + 0 = \frac{r^2}{2} \cdot \frac{\Pi}{2} = \frac{\Pi r^2}{4}$$

Somit folgt Kreisfläche

$$= 4 \cdot \frac{\Pi r^2}{4} = \Pi r^2$$

Bleibt $\int_0^{\frac{\Pi}{2}} \cos 2u \, du = 0$

Substitution : $t = 2u \quad \frac{dt}{du} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dt}{2} = du$

Integra lg renzen :

Untergrenz e : $u = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 2 \cdot 0 = 0$

Obergrenze : $u = \frac{\Pi}{2} \quad \Rightarrow \quad t = 2 \cdot \frac{\Pi}{2} = \Pi$

Somit : $\int_0^{\frac{\Pi}{2}} \cos 2u \, du = \frac{1}{2} \int_0^{\Pi} \cos t \, dt = \frac{1}{2} [\sin t]_0^{\Pi}$

$$= \frac{1}{2} (\sin \Pi - \sin 0) = 0$$