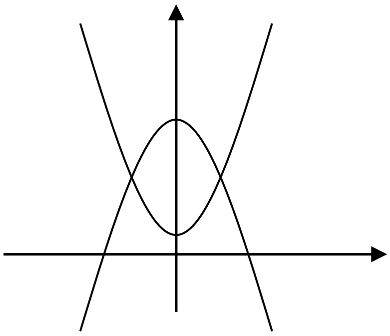
Spezialfall 1: Wird die Fläche durch die Funktion f(x), die Intervallgrenzen und die x-Achse begrenzt, so gilt :

$$x_S = \frac{\int_a^b x \cdot f(x)dx}{\int_a^b f(x)dx} \quad \text{und} \quad y_S = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b (f(x))^2 dx}{\int_a^b f(x)dx}$$

Spezialfall 2: Die Fläche werde durch die Funktion $f_u(x)$ und $f_o(x)$ mit $f_u(x) \leq f_o(x)$ für $x \in [a,b]$ und die Intervallgrenze a und b begrenzt.

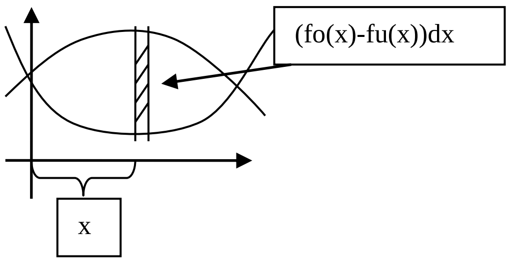
Frage : Wie errechnet sich der Schwerpunkt ?

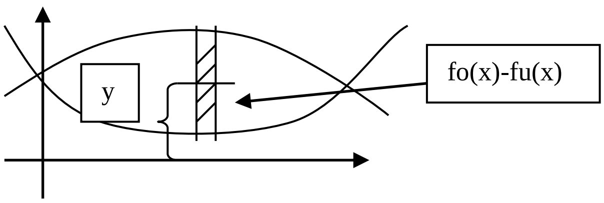
Bsp.:



$$f_u(x) = x^2 + 1$$
$$f_o(x) = 3 - x^2$$
$$a = -1 \quad b = +1$$

$$x_S = \frac{\int_a^b x \cdot (f_o(x) - f_u(x))dx}{\int_a^b (f_o(x) - f_u(x))dx} = \frac{M_y}{A}$$





$$y_S = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b (f_o(x) + f_u(x)) \cdot (f_o(x) - f_u(x))dx}{\int_a^b (f_o(x) - f_u(x))dx} = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b (f_o(x))^2 - (f_u(x))^2 dx}{\int_a^b (f_o(x) - f_u(x))dx} = \frac{M_x}{A}$$

Somit am Beispiel :

$$M_y = \int_{-1}^{+1} x\cdot(3-x^2-(x^2+1))\,dx = \int_{-1}^{+1} x\cdot(2-2x^2)\,dx = \int_{-1}^{+1} 2x-2x^3\,dx$$

$$= \left[2\frac{x^2}{2}-2\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{+1} = 2\frac{1}{2}-2\frac{1}{4}-\left(2\frac{1}{2}-2\frac{1}{4}\right)=0$$

$$M_x = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}(3-x^2)^2-(x^2+1)^2\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}9-6x^2+x^4-(x^4+2x^2+1)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}8-8x^2dx = \frac{1}{2}\left[8x-8\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{+1} = \frac{1}{2}\left(8-\frac{8}{3}-\left(-8-8\frac{(-1)}{3}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(8-\frac{8}{3}+8-\frac{8}{3}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{32}{3}=\frac{16}{3}$$

$$A = \int_{-1}^{+1}3-x^2-(x^2+1)dx = \int_{-1}^{+1}2-2x^2dx = \left[2x-2\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{+1}$$

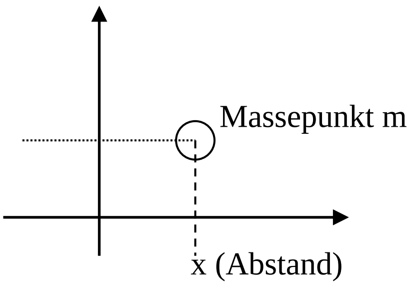
$$= 2-\frac{2}{3}-\left(-2-2\frac{(-1)}{3}\right)=4-\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$$

$$x_S = \frac{M_y}{A}=\frac{0}{\frac{8}{3}}=0$$

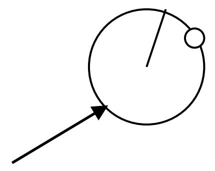
$$y_S = \frac{M_x}{A}=\frac{\frac{16}{3}}{\frac{8}{3}}=\frac{16\cdot 3}{3\cdot 8}=2$$

7.1.3. Flächenmomente 2. Ordnung

Physikalische Bedeutung



Der Massepunkt m drehe sich mit der Geschwindigkeit v im Abstand x um die y-Achse.
von oben :



T = Zeit für eine Umdrehung

$$v = \frac{2\pi x}{T}$$

$$\Rightarrow E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{2\pi x}{T}\right)^2 = \frac{1}{2}mx^2 \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$$

mit $J = mx^2$ Trägheitsmoment

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ Winkelgeschwindigkeit $\Rightarrow E_{rot} = \frac{1}{2}J\omega^2$

Vergleich mit Formel für kinetische Energie :

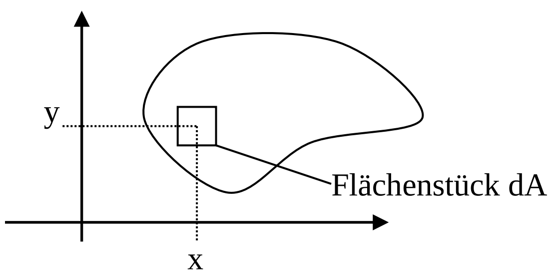
$$E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2 \quad \Leftrightarrow \quad E_{rot} = \frac{1}{2}J\omega^2$$

v wird durch ω ersetzt

m wird durch J ersetzt

Allgemeine Definition

Gegeben sei beliebige homogene Fläche



Flächenmomente 2.Ordnung I_y und I_x

I_y ist das Flächenmoment 2. Ordnung des flächenhaften homogenen Körpers bzgl. der y - Achse (Abstand x).

I_x ist das Flächenmoment 2. Ordnung des flächenhaften homogenen Körpers bzgl. der x - Achse (Abstand y)

$$\boxed{I_y = \int x^2 dA \qquad I_x = \int y^2 dA}$$

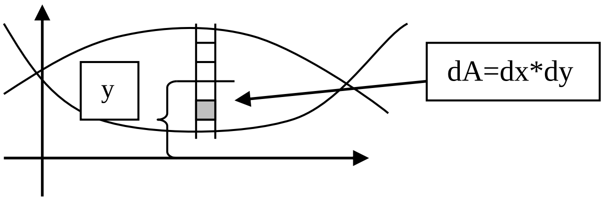
Trägheitsmomente (Flächenmomente 2. Ordnung) sind von Bedeutung bei Drehbewegungen. In der Regel können z.B. bei physikalischen Bewegungen die Formel für Translationsbewegung in Formel für Drehbewegung übertragen werden, indem die Masse durch das Trägheitsmoment ersetzt wird (Geschwindigkeit durch Winkelgeschwindigkeit, etc.)

Sei ein flächenhafter Körper durch die Funktion $f_0(x)$ und $f_u(x)$ im Intervall $x \in [a,b]$ gegeben mit $f_0(x) \geq f_u(x)$.

Gesucht ist I_x und I_y

$a)$ $\quad I_y = \int x^2 dA \Rightarrow I_y = \int_a^b x^2 \cdot \left(f_o(x) - f_u(x)\right) dx$

$b)$ $\quad I_X:$



Der Beitrag des Flächeninhalt dA zum Trägheitsmoment ist $y^2 dA$

Betrachtung des Integrals $I_x = \int y^2 dA$

1. Sumation der Beträge innerhalb der senkrechten Streifen:

$$\Delta I_x \approx \sum_y y^2 dx\, dy = dx \sum_y y^2 dy = \Delta x \int_{f_u(x)}^{f_o(x)} y^2 dy = \Delta I_x$$

2. Sumation der senkrechten Streifenbeträge $\int_a^b dI_x$

$$I_x = \int_a^b \left(\int_{f_u(x)}^{f_o(x)} y^2 dy \right) dx = \int_a^b \left(\left[\frac{y^3}{3} \right]_{f_u(x)}^{f_o(x)} \right) dx = \int_a^b \left(\frac{(f_o(x))^3}{3} \right) - \left(\frac{(f_u(x))^3}{3} \right) dx$$

$$I_x = \frac{1}{3} \int_a^b \left(f_o(x)\right)^3 - \left(f_u(x)\right)^3 dx$$

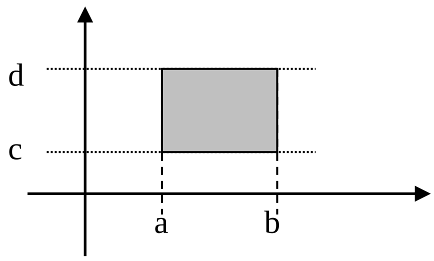
Bei homogener Flächendichte ρ_F gilt:

$J_y = \rho_F \cdot I_y$ und $J_x = \rho_F \cdot I_x$

wobei J_x und J_y die Trägheitsmomente bei Rotation um die x - bzw. um die y - Achse darstellen.

Bsp.:

Gesucht ist I_x und I_y der Fläche, die durch die Funktion $f_u(x)=c$ $f_o(x)=d$ und den Intervallgrenzen a und b definiert ist mit c<d und a<b. (Rechteck).



$$I_y = \int_a^b x^2 \left(f_o(x) - f_u(x)\right) dx$$

$$= \int_a^b x^2 (d - c)\, dx = (d-c)\int_a^b x^2\, dx = (d-c)\left[\frac{x^3}{3}\right] = (d-c)(b^3 - a^3)$$

$$I_x = \frac{1}{3}\int_a^b \left(f_o(x)\right)^3 - \left(f_u(x)\right)^3 dx = \frac{1}{3}\int_a^b d^3 - c^3 dx = \frac{1}{3}(d^3 - c^3)[x]_a^b$$

$$= \frac{1}{3}(d^3 - c^3)(b-a)$$

Zusammenfassung

Ein flächenhafter homogener Körper sei definiert durch die Funktion
$f_o(x)$ und $f_u(x)$ auf dem Intervall [a,b] mit $f_o(x) \geq f_u(x)$ $\forall x \in [a,b]$.
Fläche, Schwerpunkt und Trägheitsmoment werden wie folgt berechnet :

$$\text{Fläche} \quad : \; A = \int_a^b f_o(x) - f_u(x)\, dx$$

Schwerpunkt :

$$x_S = \frac{M_y}{A} \quad \text{mit} \quad M_y = \int_a^b x\left(f_o(x) - f_u(x)\right) dx$$

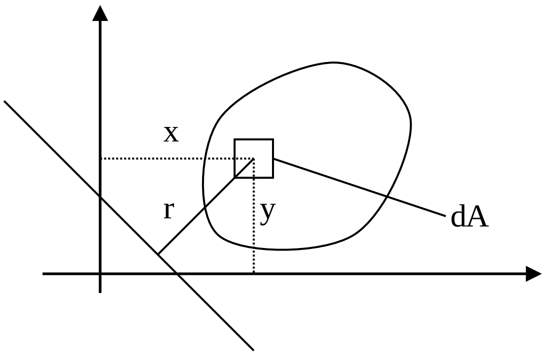
$$y_S = \frac{M_x}{A} \quad \text{mit} \quad M_x = \frac{1}{2}\int_a^b \left(f_o(x)\right)^2 - \left(f_u(x)\right)^2 dx$$

Flächenmomente 2. Ordnung :

$$I_x = \frac{1}{3}\int_a^b \left(f_o(x)\right)^3 - \left(f_u(x)\right)^3 dx$$

$$I_y = \int_a^b x^2 \left(f_o(x) - f_u(x)\right) dx$$

Massenträgheitsmoment eines flächenhaften Körpers bei Rotation um eine bel. Achse



Rotation um y - Achse

$$I_y = \int x^2 dA$$

Rotation um x - Achse

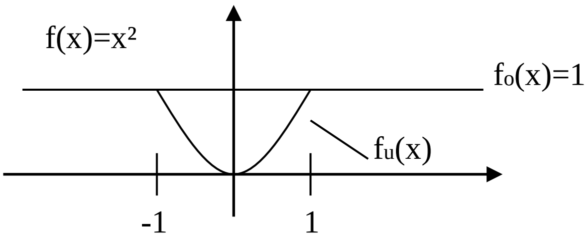
$$I_x = \int y^2 dA$$

Rotation um beliebige Achse R-bel :

$$I_{R-bel} = \int r^2 dA$$

wobei r = Abstand des Flächenstückes dA von der Rotationsachse R-bel ist.

Bsp.:



a.) Rotation um y-Achse

$$I_y = \int_{-1}^{+1} x^2(1-x^2)\,dx = \int_{-1}^{+1} x^2 - x^4\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{+1}$$

$$= \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right)\right) = \frac{2}{3} - \frac{2}{5} = \frac{10-6}{15} = \frac{4}{15}$$

b.) Rotation um x-Achse

$$I_x = \frac{1}{3}\int_{-1}^{+1} (1)^3 - (x^2)^3 dx = \frac{1}{3}\int_{-1}^{+1} 1 - x^6 dx = \frac{1}{3}\left[x - \frac{x^7}{7}\right]_{-1}^{+1}$$

$$= 1 - \frac{1}{7} - \left(-1 + \frac{1}{7}\right) = 2 - \frac{2}{7} = \frac{12}{7}$$

c.) Rotation um die Achse x = -3
Ansatz: Verschiebe Rotationsachse und Parabel um 3 nach rechts
=> x-Achse = Rotationsachse

Betrachte $f_{neu}(x) = (x-3)^2$

$f_{neu}(x)$ entspricht Parabel x^2 um 3 nach rechts verschoben

$$I = \int_2^4 x^2(1-(x-3)^2)\,dx = \int_2^4 x^2(1-x^2+6x-9)\,dx$$

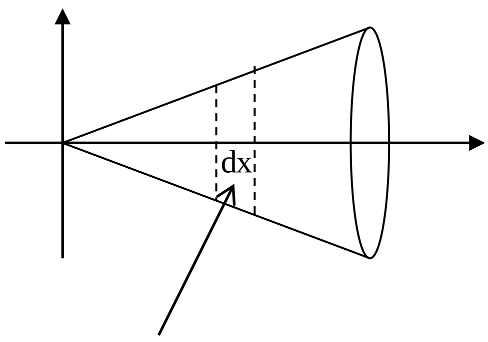
$$= \int_2^4 -x^4+6x^3-8x^2\,dx = \left[-\frac{x^5}{5}+6\frac{x^4}{4}-8\frac{x^3}{3}\right]_2^4$$

$$= \left(-\frac{1024}{5}+6\frac{256}{4}-8\frac{64}{3}\right)-\left(-\frac{32}{5}+6\frac{16}{4}-8\frac{8}{3}\right)=12{,}266$$

7.2. Dreidimensionale Objekte (Rotationssymmetrische Körper)

7.2.1. Volumen

Bsp.:



Die Rotation der Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x$ um die x - Achse $0 \le x \le 4$ beschreibt einen Kegel

Frage: Welches Volumen hat der Kegel ?

$$dV = Volumen \text{ der Kreisscheibe: } \quad \text{Fläche} \cdot \text{Höhe} = \pi r^2 \cdot dx$$

$$\text{Radius } r = f(x) \Rightarrow dV = \pi \cdot f(x)^2\, dx$$

$$Volumen_{Kegel} = \text{"}\sum \text{Volumen Kreisscheibe"} = \int dV$$

$$V = \int \pi f(x)^2\, dx$$

$$V_{Kegel} = \int_0^4 \pi f(x)^2\, dx = \pi\int_0^4 \left(\frac{1}{2}x\right)^2 dx = \pi\int_0^4 \frac{1}{4}x^2 dx = \frac{\pi}{4}\int_0^4 x^2 dx$$

$$= \frac{\pi}{4}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^4 = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{4^3}{3} = \pi\frac{16}{3}$$

1. Guldin Regel (Zusammenhang Volumen und 1. stat. Moment)

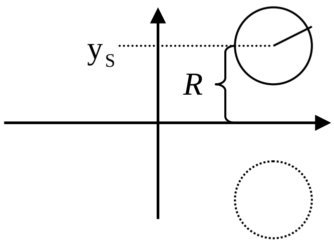
$$V_x = \int \pi f(x)^2\,dx = 2\pi \cdot \frac{1}{2}\int f(x)^2\,dx = 2\pi M_x = 2\pi \cdot y_S \cdot A \qquad \text{da} \;\; y_s = \frac{M_x}{A}$$

Anm.: V_x ist das durch Rotation um die x - Achse enstehende
Volumen $V_x = 2\pi \cdot y_S \cdot A$

d.h. Volumen eines Rotationskörpers ist gleich der erzeugenden Fläche A mal dem Weg des Flächenschwerpunktes bei der Drehung um die Achse.

Bsp.:

1.) Volumen eines Kreisringes (Torus)

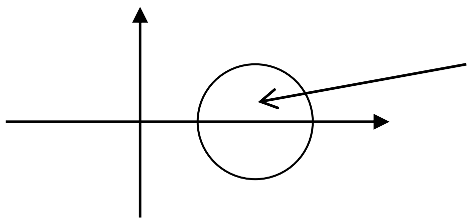


$A = \pi \cdot r^2$

$y_S = R$

$\Rightarrow V = \pi r^2 \cdot 2\pi R = 2\pi^2 r^2 R$

2.) Kugelvolumen



$A = \frac{\pi \cdot r^2}{2}$

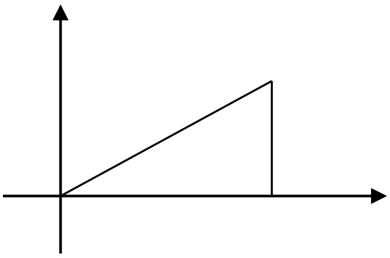
$y_S = ?$
Betrachte Kugelmittelpunkt im Koordinatenursprung (d.h. verschoben).
Betrachte Viertelkreis:

$$y_S = \frac{\frac{1}{2}\int_0^r f(x)^2 dx}{\frac{\pi r^2}{4}} = \frac{\frac{1}{2}\int_0^r \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx}{\frac{\pi r^2}{4}} = \frac{\frac{1}{2}\int_0^r (r^2 - x^2) dx}{\frac{\pi r^2}{4}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\left[r^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_0^r}{\frac{\pi r^2}{4}} = \frac{\frac{1}{2}\left(r^3 - \frac{r^3}{3}\right)}{\frac{\pi r^2}{4}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}r^3}{\frac{\pi r^2}{4}} = \frac{1}{3}r^3 \cdot \frac{4}{\pi r^2} = \frac{4}{3\pi}r$$

$$\Rightarrow V_{Kugel} = 2\frac{\pi r^2}{4} \cdot 2\pi \cdot \frac{4}{3\pi} \cdot r = \frac{4}{3}\pi r^3$$

3.) Kegelvolumen



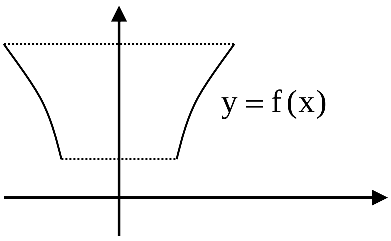
$$A = \frac{1}{2} \cdot r \cdot h \qquad y_S = \frac{\frac{1}{2}\int_0^h \left(\frac{r}{h} \cdot x\right)^2 dx}{\frac{1}{2} \cdot r \cdot h}$$

Nebenrechnung :

$$\int_0^h \left(\frac{r}{h} \cdot x\right)^2 dx = \frac{r^2}{h^2}\int_0^h x^2 dx = \frac{r^2}{h^2}\frac{1}{3}h^3 = \frac{1}{3}r^2 h \Rightarrow y_S = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} r^2 h}{\frac{1}{2} r \cdot h} = \frac{1}{3} r$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{2} r \cdot h \cdot 2\pi \frac{1}{3} r = \frac{1}{3}\pi r^2 h \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \text{Grundfläche} \cdot \text{Höhe}$$

Rotation um die y-Achse



Auflösen der Funktion $y = f(x)$ nach x

d.h. $y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)$

$$\Rightarrow V_y = \pi \int_{f(a)}^{f(b)} x^2 dy = \pi \int_{f(a)}^{f(b)} g^2(y)\, dy$$

Bsp.:

$$f(x) = x^2 \qquad x \in [1,2] \text{ Rotation um die y - Achse}$$

1. Auflösen von $y = x^2$ nach x ergibt $x = \sqrt{y} = g(y) \quad \left(x > 0 \Rightarrow +\sqrt{}\right)$

$$\Rightarrow V_y = \pi \int_{f(a)}^{f(b)} g^2(y)\,dy = \pi \int_{f(1)}^{f(2)} \left(\sqrt{y}\right)^2 dy = \pi \int_1^4 y\,dy = \pi \cdot \left[\frac{y^2}{2}\right]_1^4$$

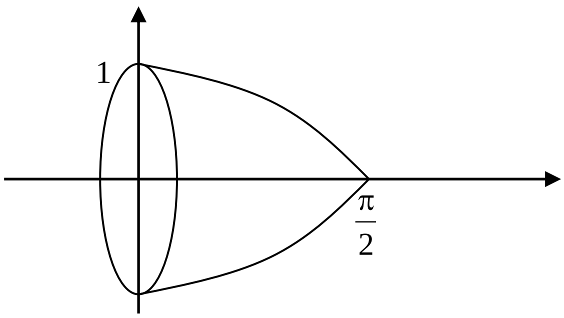
$$= \frac{\pi}{2}\left(4^2 - 1^2\right) = \frac{15}{2} \cdot \pi$$

Bsp.:

(1.)

Gesucht V_x für $f(x) = \cos(x) \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Skizze:



$$V_x = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx = \pi \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 + \cos 2x\,dx$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[x + \frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \cdot 0\right) = \frac{\pi^2}{4}$$

(2.)

Gesucht Volumen des durch Rotation um y-Achse erzeugten Körpers.