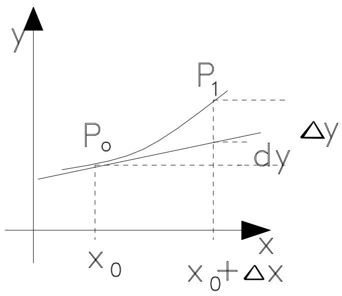
10.4 Totales Differential

Wir betrachten zunächst f(x) (Funktion einer Veränderlichen)



$f(x_0)$ sei bekannt
Gesucht: Näherungswert im Punkt P_1 für f(x)
f´(x) sei bekannt

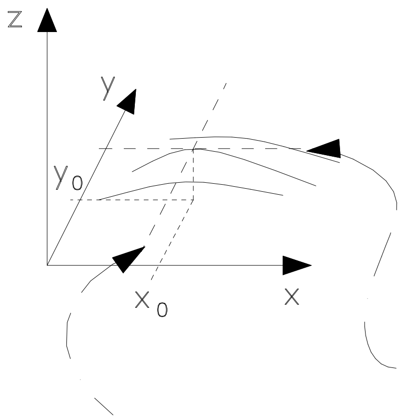
Funktionswert im Punkt P1 kann linear unter der Verwendung der Tangente in P0 näherungsweise bestimmt werden.

$$f\left(x_0 + \Delta x\right) \approx f\left(x_0\right) + \underbrace{f'\left(x_0\right) \cdot \Delta x}_{dy} = f\left(x_0\right) + dy$$

Wir nennen dy = f´(x)* Δx das Differential von f(x) = y

Übertragung auf Funktion mehrerer Veränderlicher

Gegeben sei differenzierbare Funktion z = f(x,y)



Statt der Tangente (Gerade 1- Dimension) betrachten wir die Tangentialebene (2- Dimensionen) in Punkt P_0 (x_0/y_0)

Tangente an Schnittkurve parallel zur x-Achse

Tangente an Schnittkurve parallel zur y-Achse

Ersetze im Prinzip „gewölbte Kurve“ durch Ebene.
Start im Punkt $P_0(x_0/y_0)$.

Gehe zuerst um Δx in x-Richtung => Änderung von z (Höhe) ist durch z_x gegeben
-> $(x_0+\Delta x/y_0)$

Gehe dann um Δy in y-Richtung => Änderung von z ist durch z_y gegeben
-> $(x_0+\Delta x/y_0+\Delta y)$

Ziel im Punkt $P_1(x_0+\Delta x/y_0+\Delta y)$

Näherung durch Tangentialebene:

$$z_T(x_0 + \Delta x / \ y_0 + \Delta y) = z_0 + \underbrace{\frac{\delta z}{\delta x} \cdot \Delta x + \frac{\delta z}{\delta y} \cdot \Delta y}_{dz}$$

$$\Delta x = dx \ ; \ \Delta y = dy$$

z_T liefert Näherungswert für $z(x_0+\Delta x/y_0+\Delta y)$ unter der Verwendung der Tangentialebene.

Man nennt

$$dz = \frac{\delta z}{\delta x} \cdot \Delta x + \frac{\delta z}{\delta y} \cdot \Delta y$$

das Vollständige oder <u>totale Differential</u> der Funktion $z = f(x,y)$

Allgemein:

Gegeben sei die differenzierbare Funktion $z = f(x_1,x_2, \ldots ,x_n)$, somit ist

$$dz = \frac{\delta z}{\delta x_1} \cdot \Delta x_1 + \frac{\delta z}{\delta x_2} \cdot \Delta x_2 + \ \ldots \ + \frac{\delta z}{\delta x_n} \cdot \Delta x_n$$

das **totale Differential** von $f(x_1,x_2, \ldots ,x_n)$.

Bsp(1):

Gesucht ist das totale Differential der Funktion $z = f(x,y) = 3x + 2y +1$
Für Punkt P(1/2) und $dx = 0.5$ $dy = 0.25$ soll Näherungswert bestimmt werden und mit exaktem Wert verglichen werden.

$$\frac{\delta z}{\delta x} = 3 \qquad \frac{\delta z}{\delta y} = 2$$

$$dz = 3 \cdot 0{,}5 + 2 \cdot 0{,}25$$

$$= 2$$

$$z_{(1/2)} = 8$$

$$z_{(1/2)} + z_T = 10$$

$$z_{(1{,}5/2{,}25)} = 10$$

Somit $\Delta z = 2 = dz$, da die Funktion $f(x,y) = 3x + 2y + 1$ eine Ebene beschreibt

Bsp(2):

Gesucht ist das totale Differential z = f(x,y) = xy (keine Ebene!)

$$
\begin{aligned}
dz &= z_x \cdot dx + z_y \cdot dy \\
&= y \cdot dx + x \cdot dy
\end{aligned}
$$

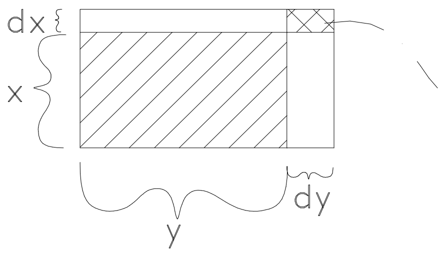
Betrachten der Differenz zwischen der Näherung dz und der exakten Änderung Δx an beliebiger Stelle (x,y) bei einer Änderung von x um dx und y um dy

$$
\begin{aligned}
\Delta z &= f\left(x + dx / y + dy\right) - f\left(x / y\right) \\
&= \left(x + dx\right) \cdot \left(y + dy\right) - xy \\
&= xy + x \cdot dy + y \cdot dx + dx \cdot dy - xy \\
\Delta z &= x \cdot dy + y \cdot dx + dx \cdot dy
\end{aligned}
$$

Somit **Δz - dz = dxdy** der Fehler des Näherungswerts !

Geometrische Betrachtung

Fläche $f\left(x, y\right) = xy \mathrel{\hat{=}}$ eines Rechtecks



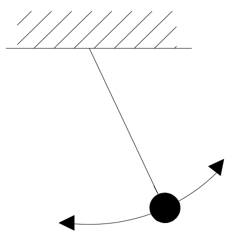
dxdy (Fehler)

Anwendung des totalen Differentials in der Fehlerrechnung

Eine Größe, die anhand einer Formel aus Eingangsgrößen berechnet wird, soll mit Fehlerabschätzung bestimmt werden, wobei die Meßfehler der Eingangsgrößen bekannt sind.

Bsp:

Bestimmung der Gravitationskonstante *g* mit Fadenpendel



$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

T = Schwingungsdauer
l = Länge des Pendels
g = Gravitationskonstante (soll bestimmt werden)

$$
\begin{aligned}
T^2 &= 4\pi^2 \cdot \frac{l}{g} \\
\Rightarrow g &= \frac{4\pi^2 l}{T^2} \\
\Rightarrow &\ g\left(l, T\right)
\end{aligned}
$$

Die Ungenauigkeit der Werte von l und T führt zu einer Ungenauigkeit von g. Für kleine Abweichungen der Eingangsgrößen kann die Abweichung (Fehler) in der Endgröße durch Tangentialebene (totales Differential) angenähert werden.

$$\begin{aligned} |\Delta g| &\le \left|\frac{\delta g}{\delta l}\right| \cdot |\Delta l| + \left|\frac{\delta g}{\delta T}\right| \cdot |\Delta T| \\ &= \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot |\Delta l| + \left|-2\,\frac{4\pi^2 l}{T^2}\right| \cdot |\Delta T| \end{aligned}$$

wobei Δl und ΔT die Fehler der Eingangsgrößen sind !

$|\Delta g|$ wird als Maximalfehler bezeichnet

$\frac{|\Delta g|}{|g|}$ wird als relativer Maximalfehler bezeichnet

Bsp(1):

Falls Δl und ΔT, sowie T_0, l_0 bekannt sind;
=> $|\Delta g|$ durch Einsetzen leicht bestimmbar

Bsp(2):

Zur Bestimmung der Erdbeschleunigung wird ein Pendel der Länge l = 118,5 cm mit der Schwingungsdauer T = 2,180 s verwendet.
Wie genau müssen l und T bestimmt werden, damit der absolute Maximalfehler $|\Delta g|$ höchstens ± 1cm/s²beträgt ?

d.h. Qualitätsanforderungen für ein Ergebnis sind gegeben und Meß- (Produktions-) Genauigkeit muß dies erfüllen.
Gefordert:

$$|\Delta g| = 1\,\frac{cm}{s^2}$$

Annahme (Erfahrungswert): Meßfehler in l und T tragen je zur Hälfte zu $|\Delta g|$ bei.
Somit:

$$\frac{4\pi^2}{T^2} \cdot |\Delta l| = 0.5\,\frac{cm}{s^2} \Rightarrow |\Delta l| = \frac{T^2}{4\pi^2} \cdot 0.5\,\frac{cm}{s^2} = 0{,}06\ \text{cm}$$

$$\left|\frac{-8\pi^2 l}{T^2}\right| \cdot |\Delta T| = 0.5\,\frac{cm}{s^2} \Rightarrow |\Delta T| = 0.00055\ \text{s}$$

d.h. Pendellänge muß auf 0,06 cm und die Schwingungsdauer auf 0,00055 s genau bestimmt werden, um die geforderte Genauigkeit zu erfüllen.

10.5 Ausgleichsrechnung

Werden zur Bestimmung unbekannter Größen mehrere Messungen durchgeführt, so entstehen in der Regel aufgrund von Meßfehlern ungenaue Werte.
Die Aufgabe der Ausgleichsrechnung besteht in der Bildung eines „geeigneten“ Mittelwertes aus den gegebenen Meßwerten.

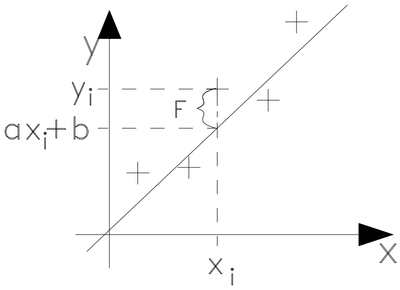
10.5.1 Ausgleichsgerade

Bsp:

In n Messungen werden die Wertepaare (x_i/y_i) i = 1, 2, ... , n gemessen , die in etwa auf einer Geraden liegen sollen.

Frage: Wie lautet die am „Besten angenäherte“ Geradengleichung (Ausgleichsgerade)?

$y = ax + b$



d.h. Summe der Fehlerquadrate soll minimal werden.

Fehler := Vertikaler Abstand zwischen Meßpunkt und Gerade

d.h.

$$e_i = |ax_i + b - y_i|$$

Summe der Fehlerquadrate:

$$\begin{aligned} E(a,b) &:= \sum_{i=1}^{n} e_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} |ax_i + b - y_i|^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2 \end{aligned}$$

notwendige Bedingung:

$$\frac{\delta E}{\delta a} = 0 \qquad \frac{\delta E}{\delta b} = 0$$

$$\lim_{a\to\infty} E(a,b) = \lim_{b\to\infty} E(a,b) = \infty$$

=> Es muß ein Minimum geben!

$$\frac{\delta E}{\delta a} = 2\cdot\sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i)\cdot x_i \overset{!}{=} 0 \qquad /:2$$

$$\Leftrightarrow b\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i + a\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i y_i)$$

$$\Leftrightarrow bn\bar{x} + a\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i^2 = \sum_{i=1}^{n}x_i y_i \qquad (1)$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}y_i$$

$$\frac{\delta E}{\delta b} = 2\cdot\sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i)\cdot 1 \overset{!}{=} 0 \qquad /:2$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}b + a\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i = \sum_{i=1}^{n}y_i$$

$$\Leftrightarrow nb + an\bar{x} = n\bar{y} \qquad (2)$$

$$(1) - \bar{x}\cdot(2) = bn\bar{x} - bn\bar{x} + a\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - an\bar{x}^2 = \sum_{i=1}^{n}x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}$$

$$\Leftrightarrow a\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - n\bar{x}^2\right) = \sum_{i=1}^{n}x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{\sum_{i=1}^{n}x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - n\bar{x}^2}$$

$$a = \frac{n\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i y_i - n\bar{x}\cdot n\bar{y}}{n\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - n\bar{x}\cdot n\bar{x}}$$

Einsetzen von a in (1) oder (2) ergibt:

$$b = \bar{y} - \bar{x}\cdot\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - n\bar{x}^2}$$

$$\boxed{a = \frac{\sum_{i=1}^{n}x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - n\bar{x}^2} \qquad b = \bar{y} - \bar{x}\cdot\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - n\bar{x}^2}}$$

Da lediglich eine Stelle, die Bedingung I erfüllt, gefunden wurde, und mindestens ein Minimum existieren muß ergibt sich:
=> Die Werte für a und b stellen die gesuchte Ausgleichsgerade dar!

Anmerkung:

(1) Ausgleichsgerade geht durch den Schwerpunkt $(\bar{x}, \bar{y})$

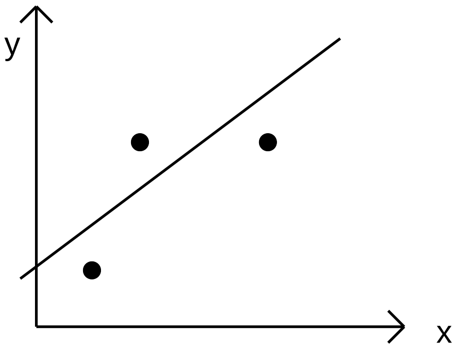
da $nb + an\bar{x} = n\bar{y} \Leftrightarrow b + a\bar{x} = \bar{y} \quad somit \quad y(\bar{x}) = a\bar{x} + b = \bar{y}$

(2) Sind genau 2 Punkte gegeben, so geht die Ausbleichsgerade durch diese Punkte.

Bsp:

Wir betrachten eine Meßreihe, die aus 3 Messungen besteht

i	x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2
1	1	1	1	1
2	2	4	8	4
3	4	4	16	16
			$\sum 25$	$\sum 21$



$$\bar{x} = \frac{1+2+4}{3} = \frac{7}{3} \qquad \bar{y} = \frac{1+4+4}{3} = 3 \qquad n = 3$$

Somit: $y = ax + b$

$$a = \frac{25 - 3\cdot\frac{7}{3}\cdot 3}{21 - 3\cdot\left(\frac{7}{3}\right)^2} = \frac{6}{7} \qquad b = 3 - \frac{7}{3}\cdot\frac{25 - 3\cdot\frac{7}{3}\cdot 3}{21 - 3\cdot\left(\frac{7}{3}\right)^2} = 1 \qquad \Rightarrow y = \frac{6}{7}x + 1$$

(Ausgleichsgerade)

y(1) = 13/7 y(2) = 19/7 y(3) = 25/7

Summe der Fehlerquadrate: $E = \left(\frac{6}{7}\right)^2 + \left(\frac{9}{7}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^2 = \frac{36+81+9}{49} = 2{,}57$

Bestimmung des mittleren Fehlers:

Sei e_i der mittlere Fehler einer Messung, d.h. $e_i = ax_i + b - y_i$
dann ist der mittlere Fehler m wie folgt definiert:

$$m = \pm\sqrt{\frac{\sum e_i^2}{n-2}}$$

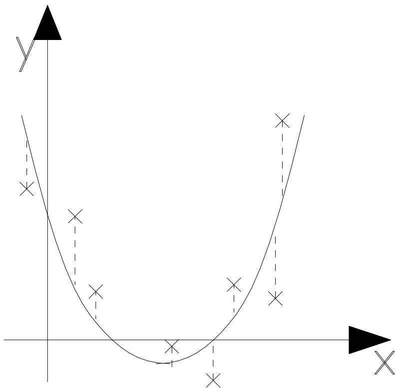
Es tragen n-2 Punkte zum Fehler bei,
weil genau 2 Punkte eine Gerade definieren!
=> Die Werte von n-2 Punkten bestimmen den Fehler

$$m = \pm\sqrt{\frac{2{,}57}{n-2}} \approx 1{,}60$$

10.5.2 Ausgleichsparabel

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$ d.h. 3 Unbekannte (a_0, a_1, a_2)

Falls genau 3 Meßwertpaare gegeben sind, => a_0, a_1, a_2
bestimmen der Variablen durch lösen des Gleichungssystems
Falls die Anzahl der Meßwerte > 3 dann Ausgleichsrechnung



Forderung:

$$\sum \underbrace{\text{Fehlerquadrate}}_{=E(a_0,a_1,a_2)} \overset{!}{=} \text{Min}$$

Notwendige Bedingung:

$$\frac{\delta E}{\delta a_i} = 0 \qquad i = 0, 1, 2$$

$$E(a_0, a_1, a_2) = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - y_i\right)^2$$

(1) $$\frac{\delta E}{\delta a_0} = \sum_{i=1}^{n} 2\left(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - y_i\right) \cdot 1 = 0$$

(2) $$\frac{\delta E}{\delta a_1} = \sum_{i=1}^{n} 2\left(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - y_i\right) \cdot x_i = 0$$

(3) $$\frac{\delta E}{\delta a_2} = \sum_{i=1}^{n} 2\left(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - y_i\right) \cdot x_i^2 = 0$$

$$(1) \Rightarrow n a_0 + a_1 \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i + a_2 \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$(2) \Rightarrow a_0 \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i + a_1 \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_2 \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^3 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$(3) \Rightarrow a_0 \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_1 \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^3 + a_2 \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^4 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i$$

Einsetzen der Wertepaare (x_i, y_i) liefert ein lineares Gleichungssystem.
3 Gleichungen für die 3 Unbekannten (a_0, a_1, a_2) - Die Lösung dieses Gleichungssystems ergibt die Ausgleichsparabel.

Anmerkung:

Für Polynome vom Grad n (n>2) wird analog verfahren; d.h. es ist dann auch ein lineares Gleichungssystem mit (n+1) Gleichungen mit (n+1) Unbekannten zu lösen.

Die Darstellung von Expotential und Potenzfunktionen kann durch Logarithmieren linear in Form einer Ausgleichsgeraden erfolgen.
Bsp:

Die Meßpunkte sollen durch eine Ausgleichsfunktion der Form $y(x) = C \cdot x^n$ optimal angepaßt werden.

x_i	1	2	3	4
y_i	2	6.1	11.2	18.3

C und n sind zu bestimmen!

Logarithmieren:

$$\begin{aligned}
\ln y &= \ln\left(C \cdot x^n\right) \\
&= \ln\left(e^{\ln C} \cdot e^{\ln x^n}\right) \\
&= \ln\left(e^{\ln C + \ln x^n}\right) \\
&= \ln C + \ln x^n \\
&= \ln C + \ln\left(e^{\ln(x)\cdot n}\right) \\
\underbrace{\ln y}_{\tilde{y}} &= \ln C + \underbrace{\ln(x)}_{\tilde{x}} \cdot n \\
\tilde{y} &= \ln C + \tilde{x} n
\end{aligned}$$

Geradengleichung:

$$\begin{aligned}
&\tilde{y} = n\tilde{x} + b \\
\text{mit} \quad &\tilde{y} = \ln y \\
&\tilde{x} = \ln x \\
&b = \ln C
\end{aligned}$$

Unsere Meßpunkte (x_i, y_i) müssen umgerechnet werden: $(x_i, y_i) \Rightarrow (\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)$

i	x_i	y_i	$\tilde{x}_i$	$\tilde{y}_i$	$\tilde{x}_i \tilde{y}_i$	$\tilde{x}_i^2$
1	1	2	0	0.69	0	0
2	2	6.1	0.69	1.81	1.25	0.48
3	3	11.2	1.10	2.42	2.65	1.21
4	4	18.3	1.39	2.91	4.03	1.93

$$\sum \tilde{x}_i \tilde{y}_i = 7{,}94 \qquad \bar{\tilde{x}} = 0.8 \qquad \bar{\tilde{y}} = 1.96$$

$$b = 1{,}96 - 0{,}8 * \frac{7{,}95 - 4 * 0{,}8 * 1{,}96}{3{,}62 - 4 * (\ 0{,}8)^2} \approx 0{,}69 \qquad n = \frac{7{,}95 - 4 * 0{,}8 * 1{,}96}{3{,}62 - 4 * (0{,}8)^2} \approx 1{,}58$$

Somit:

$$\tilde{y} = 1{,}58\tilde{x} + 0{,}69 \Rightarrow mit \quad \ln C = 0{,}69 \quad C = e^{\ln C} = e^{0{,}69} \approx 2$$

$$d.h. \quad y(x) = 2 \cdot x^{1{,}58}$$