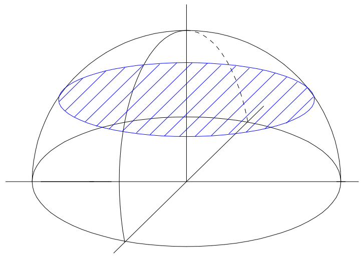
Bsp(2):

Bestimmung des Schwerpunktes einer Halbkugel der Dichte ρ = 1




Schwerpunkt auf der z-Achse $z_s$ = ?

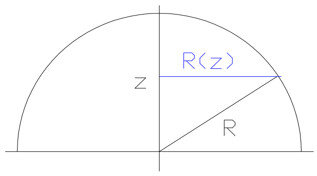
$$z_s = \frac{\sum \text{Scheibenmasse in Höhe z} \cdot z}{\text{Gesamtmasse}}$$

$$\Leftrightarrow \rho \cdot V \cdot z_s = \int\int\int z \cdot \rho \, dV$$

$$V = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right) = \frac{2}{3}\pi R^3$$

mit ρ = 1 $\quad \Rightarrow \frac{2}{3}\pi R^3 \cdot z_s = \iiint z \cdot r \, dr \, dz \, d\varphi$

Integrationsgrenzen müssen bestimmt werden:




$0 \le \varphi \le 2p$
$0 \le r \le R(z)$
$0 \le z \le R$

$R^2(z) + z^2 = R^2$

$R(z) = \sqrt{R^2 - z^2}$

Somit:

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{R}\int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} z \; r \; dr \, dz \, d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{R}\left[z \cdot \frac{r^2}{2}\right]_0^{\sqrt{R^2-z^2}} dz \, d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{R}\left(\frac{z}{2}(R^2 - z^2)\right) dz \, d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{R}(zR^2 - z^3) \, dz \, d\varphi$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[\frac{z^2}{2}R^2 - \frac{z^4}{4}\right]_0^R d\varphi = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\left(R^4 - \frac{R^4}{2}\right) d\varphi$$

$$= \frac{1}{4}\frac{R^4}{2}2\pi$$

$$= \frac{1}{4}\pi R^4$$

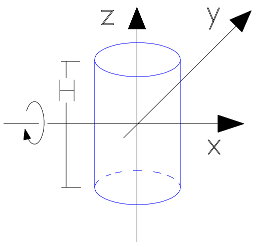
Damit ergibt sich für den Schwerpunkt:

$$\Rightarrow \frac{2}{3}\pi R^3 \cdot z_s = \pi \frac{R^4}{4}$$

$$\Rightarrow z_s = \frac{3}{8} R$$

Bsp(3):

Massenträgheitsbestimmung eines Zylinders bezüglich der senkrechten Mittelachse



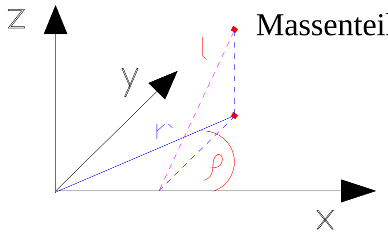

$$J = \iiint_V l^2 \, dm$$

$$dm = \rho \, dV = \rho \, r \, dr \, d\varphi \, dz$$

$\rho = 1$

$l$ = Abstand von dm zur x-Achse

Bestimmung von $l^2$:




$$l^2 = z^2 + (r \sin\varphi)^2$$
$$= z^2 + r^2 \sin^2\varphi$$

Somit:

$$J = \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \int_0^R \left(z^2 + r^2 \sin^2\varphi\right) r \, \rho \, dr \, dz \, d\varphi$$

$$= \rho \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \left[\frac{1}{2} z^2 r^2 + \frac{r^4}{4} \sin^2\varphi\right]_0^R dz \, d\varphi$$

$$= \rho \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \left(\frac{1}{2} z^2 R^2 + \frac{R^4}{4} \sin^2\varphi\right) dz \, d\varphi$$

$$= \rho \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{6} z^3 R^2 + \frac{1}{4} R^4 z \sin^2\varphi\right]_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} d\varphi = \rho \int_0^{2\pi} \left(\frac{H^3}{8}\frac{R^2}{6} + \frac{H}{2}\frac{R^4}{4}\sin^2\varphi - \left(-\frac{H^3}{8}\frac{R^2}{6} - \frac{H}{2}\frac{R^4}{4}\sin^2\varphi\right)\right) d\varphi$$

$$= \rho \frac{H^3 R^2}{24} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi} + \rho \frac{R^4 H}{4} \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin^2\varphi \, d\varphi}_{\pi^*} = \rho \frac{H^3 R^2}{24} 2\pi + \rho \frac{H R^4}{4} \pi$$

$$= \rho\pi \left(\frac{H^3 R^2}{12} + \frac{R^4 H}{4}\right)$$

Anmerkung:

$$* \int_0^{2\pi} \sin^2\varphi \; d\varphi = \int_0^{2\pi} \underbrace{\sin\varphi}_{u}\underbrace{\sin\varphi}_{v'} \; d\varphi$$

$$\left.\begin{array}{ll} u = \sin\varphi & u' = \cos\varphi \\ v = -\cos\varphi & v' = \sin\varphi \end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{\left[\sin\varphi(-\cos\varphi)\right]_0^{2\pi}}_{0} - \int_0^{2\pi} \cos\varphi(-\cos\varphi) \; d\varphi = \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi \; d\varphi$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi \; d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(1 - \sin^2\varphi\right) \; d\varphi = 2\pi - \int_0^{2\pi} \sin^2\varphi \; d\varphi$$

$$\Rightarrow 2\pi = 2\int_0^{2\pi} \sin^2\varphi \; d\varphi$$

$$\Rightarrow \pi = \int_0^{2\pi} \sin^2\varphi \; d\varphi$$

### *11.4 Volumen und Massenträgheitsmoment in kartesischen Koordinaten*

Das Massenträgheitsmoment wird in kartesischen Koordinaten wie folgt berechnet:

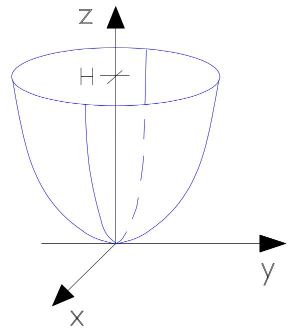
$$\boxed{J = \int_{x=a}^{b} \int_{y=f_u(x)}^{f_o(x)} \int_{z=z_u(x,y)}^{z_o(x,y)} \rho(x,y,z) \cdot r_a^2(x,y,z) \; dz\, dy\, dx}$$

wobei ρ (x,y,z) die ortsabhängige Dichte darstellt (homogener Körper: ρ= const.)
$r_a$ (x,y,z) entspricht dem Abstand des Volumenelements dm = dz dy dx von a
mit a = Rotationsachse

| |
|---|
| Setzt man für $r_a$ (x,y,z) = 1 sowie für ρ = 1 so liefert das Integral das Volumen des Körpers; d.h. die Grenzen bleiben gleich, aber die zu integrierende Funktion ändert sich !! |

Bsp:
Volumen eines Rotationsparaboloids soll in kathesischen Koordinaten berechnet werden:

Rotationsparaboloid




Parabel $z = y^2$ rotiert um die z-Achse; H = 4
Rotation führt zu einem „Kelch"

Best. der Grenzen:

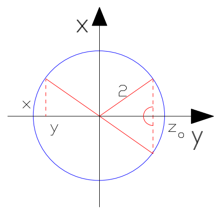
z-Integration: $z_u(x,y) = x^2 + y^2$ (Bin an bel. Stelle(x,y))

$z_o(x,y) = 4$

y-Integration: $f_u(x) = -\sqrt{4-x^2}$ (Bin an Stelle x)

$f_o(x) = \sqrt{4-x^2}$

x-Integration: a = -2
b = 2




Somit:

$$V = \int_{x=-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{4} dz\, dy\, dx$$

$$= \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} [z]_{x^2+y^2}^{4}\, dy\, dx$$

$$= \int_{-2}^{2} \left[4y - x^2 y - \frac{y^3}{3}\right]_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dx$$

$$= \int_{-2}^{2} 2\left((4-x^2)\sqrt{4-x^2} - (4-x^2)\frac{\sqrt{4-x^2}}{3}\right) dx$$

$$= \int_{-2}^{2} 2\sqrt{4-x^2}\,(4-x^2)\,\frac{2}{3}\, dx$$

$$= \frac{4}{3} 4 \int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\, dx \;-\; \frac{4}{3}\int_{-2}^{2} x^2 \sqrt{4-x^2}\, dx$$

$$V = \qquad I_1 \qquad - \qquad I_2$$

$I_1$ : Durch Substitution:

$$x = 2 \cdot \sin z \qquad dx = 2 \cdot \cos z\; dz \Rightarrow \sqrt{4-x^2} = 2\sqrt{1-\sin^2 z} = 2 \cdot \cos z$$

daraus folgt:

$$\int \sqrt{4-x^2}\, dx = \int 2 \cdot \cos z \cdot 2 \cdot \cos z\; dz \;=\; 4\int \cos^2 z\; dz$$

Bestimmung von:

$$4\int \cos^2 z\ dz = 4\frac{1}{2}\int 1+\cos 2z\ dz \qquad \text{mit} \quad \cos 2z = 2\cos^2 z - 1$$

$$= 2\int dz \ + \ 2\int \cos 2z\ dz \qquad \Rightarrow \cos^2 z = \frac{1}{2}(1+\cos 2z)$$

$$= 2z \ + \ 2\int \cos u\ \frac{du}{2}$$

$$= 2z \ + \ \sin 2z + C$$

Grenzen:

$$x = 2\sin z \Rightarrow \frac{x}{2} = \sin z \Rightarrow z = \arcsin\frac{x}{2}$$

$$\arcsin\frac{2}{2} = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin\frac{-2}{2} = \arcsin -1 = -\frac{\pi}{2}$$

Daraus folgt für $I_1$:

$$\Rightarrow I_1 = \frac{16}{3}\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\ dx = \frac{16}{3}\left[2z+\sin 2z\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{16}{3}\left(\pi + \underbrace{\sin\pi}_{0} - \left(-\pi + \underbrace{\sin(-\pi)}_{0}\right)\right)$$

$$= \frac{32}{3}\pi$$

Analog folgt für $I_2$:

$$x = 2\sin z \qquad dx = 2\cos z dz \qquad \sqrt{4-x^2} = 2\cos z$$

$$\Rightarrow \int x^2\sqrt{4-x^2}\ dx = \int 4\sin^2 z\cdot 2\cos z\cdot 2\cos z\ dz = 16\int \sin^2 z\cdot\cos^2 z\ dz$$

$$\text{mit} \quad \cos^2 z = \left(1-\sin^2 z\right)$$

$$= 16\int \sin^2 z\left(1-\sin^2 z\right)dz = 16\int \sin^2 z\ dz - 16\int \sin^4 z\ dz$$

$$\int \sin^2 z dz = \int\left(1-\cos^2 z\right)dz = \int 1\ dz - \int \cos^2 z\ dz$$

$$= z - \frac{1}{2}z - \frac{1}{4}\sin 2z + C = \frac{1}{2}z - \frac{1}{4}\sin 2z + C$$

$$\int \sin^4 z = \int \sin^2 z \cdot \sin^2 z dz$$

mit $\sin^2 z = \frac{1}{2}(1 - \cos 2z)$

$$= \frac{1}{4}\int (1 - \cos 2z)^2 dz \qquad u = 2z \qquad dz = \frac{du}{2}$$

$$= \frac{1}{4}\int (1 - \cos u)^2 \frac{du}{2} = \frac{1}{8}\int \left(1 - 2\cos u + \cos^2 u\right) du$$

$$= \frac{1}{8}\left[u - 2\sin u + \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}\sin 2u + C\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{3}{2}u - 2\sin u + \frac{1}{4}\sin 2u + C\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left[3z - 2\sin 2z + \frac{1}{4}\sin 4z + C\right]$$

Insgesamt $I_2$

$$\frac{4}{3}\int_{x=-2}^{+2} x^2\sqrt{4 - x^2}\,dx = \frac{4}{3}16\left[\frac{1}{2}z - \frac{1}{4}\sin 2z - \frac{3}{8}z + \frac{1}{4}\sin 2z - \frac{1}{32}\sin 4z\right]$$

$$= \frac{4}{3}16\left[\frac{1}{8}z - \frac{1}{32}\sin 4z\right] = \frac{4}{3}\left[2z - \frac{1}{2}\sin 4z\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{4}{3}\left(\pi - \frac{1}{2}\sin 2\pi - \left(-\pi - \frac{1}{2}\sin 2\pi\right)\right)$$

$$= \frac{4}{3}2\pi = \frac{8}{3}\pi$$

$$\Rightarrow V = \frac{32}{3}\pi - \frac{8}{3}\pi = \frac{24}{3}\pi = 8\pi$$

Vergleich mit Zylinderkoordinaten : $V = \frac{\pi}{2} H^2 = \frac{\pi}{2} 4^2 = \frac{16}{2} \pi = 8\pi$

Somit:

$$V = \quad I_1 \quad - \quad I_2$$

$$V = 8\pi$$