Formale Darstellung des Vektorproduktes mit der Determinante

<u>Def.:</u> Ein Schema von $m \cdot n$ Zahlen in m Zeilen und n Spalten bezeichnet man als (m,n)-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Kurzschreibweise : $A = (a_{ik})$. Der erste Index bezeichnet die Zeilen-Nr, der zweite Index die Spalten-Nr.
Für “quadratische“ Matrizen, d.h. solche mit gleicher Zeilen- und Spaltenzahl (m=n), wollen wir die Determinante definieren, welche eine Funktion aller Elemente der Matrix ist.

Für eine (2,2)-Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

ist $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} := a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

Bsp.: $\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 7 \cdot (-3) = 31$

Für eine (3,3)-Matrix $A = (a_{ik})$ ist $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \;;$$

d.h. in Worten : addiere mit wechselnden Vorzeichen (+ - + [- + ...]) die Elemente der ersten Zeile multipliziert mit der Determinante der Restmatrix, die sich nach Streichen der (1.) Zeile und Spalte dieses Elementes ergibt.

Bsp.: $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

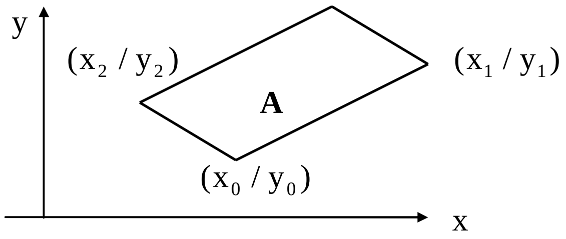
$$\det\ A = \begin{vmatrix} 1 & (-3) & 0 \\ 2 & (-1) & 4 \\ 3 & (-2) & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} (-1) & 4 \\ (-2) & 5 \end{vmatrix} - (-3) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & (-1) \\ 3 & (-2) \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot \big((-1) \cdot 5 - 4 \cdot (-2)\big) - (-3) \cdot \big(2 \cdot 5 - 3 \cdot 4\big) + 0$$

$$= 1 \cdot (-5 + 8) + 3 \cdot (10 - 12)$$

$$= +3 + 3 \cdot (-2) = \underline{-3}$$

Anwendung : die Fläche eines Parallelogramms ist gegeben durch



$$A = \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 \end{vmatrix} = (x_1 - x_0)(y_2 - y_0) - (y_1 - y_0)(x_2 - x_0)$$

<u>Cramer´sche Regel</u>

Das Gleichungssystem $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$ hat die Lösung :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

vorausgesetzt, die Determinante im Nenner ist $\neq 0$.
Entsprechend erhält man bei einem (3,3)-Gl-System mit den Unbekannten x_1, x_2, x_3 für die 2. Unbekannte, indem man deren Koeffizienten durch die rechten Seiten (im Zähler) ersetzt :

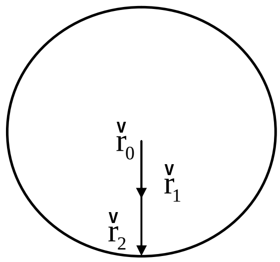
$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

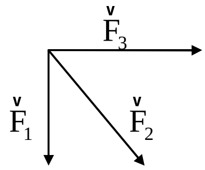
Die Cramersche Regel ist zur Lösung von (2,2)- und evtl. (3,3)-Gl-systemen günstig, für große Gl-systeme aber nicht sinnvoll, da der Aufwand zur Berechnung einer Determinante etwa der Lösung des gesamten Gl-systems entspricht.

<u>Satz</u> (ohne Beweis)
Ein lineares Gl-system von n Gleichungen mit n Unbekannten ist dann und nur dann <u>eindeutig</u> lösbar, wenn die Koeffizientenmatrix eine **Determinante $\neq$ 0** hat.

2.2.4. Vektorprodukt

Bsp.: Eine auf der Mittelachse festgeschraubte Scheibe soll gedreht werden.





mögliche Kräfte : $\vec{F}_1,\ \vec{F}_2,\ \vec{F}_3$ $\qquad |\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3|$

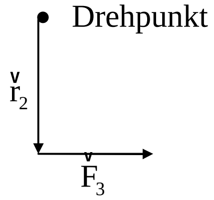
mögliche Ansatzpunkte : $\vec{r}_0,\ \vec{r}_1,\ \vec{r}_2$

Frage : Mit welcher Kraft an welchem Ansatzpunkt erhält man die stärkste „Drehung“

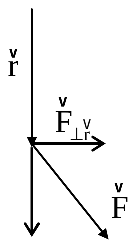
Schätzskala :

	$\vec{F}_1$	$\vec{F}_2$	$\vec{F}_3$
$\vec{r}_0$	0	0	0
$\vec{r}_1$	0	1	2
$\vec{r}_2$	0	2	$\boxed{3}$

Lösung $\vec{r}_2 \times \vec{F}_3$



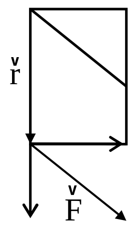
“Stärke“ der “Drehung“ bei der Kraft $\vec{F}$



$$|\text{Drehung}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}_{\perp\vec{r}}|$$

Zerlegung in Komponenten senkrecht und parallel zu $\vec{r}_2$

Berechnung von $|\text{Drehung}|$

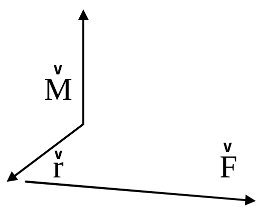


$|\vec{r} \times \vec{F}|$ entspricht der Fläche des Parallelogramms, das von den Vektoren $\vec{r}$ und $\vec{F}$ aufgespannt wird.

Die Drehung hat einen Betrag (Parallelogramm) und eine Richtung, d.h. sie kann als <u>Vektor</u> dargestellt werden.
physikalisch : "Drehung" im obigen Bsp. heißt Drehmoment $\vec{M}$.

Zusammenfassung :
Das Drehmoment der Vektoren $\vec{r}$ und $\vec{F}$ wird wie folgt berechnet :

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (\times \;\hat{=}\; \text{Vektorprodukt})$$

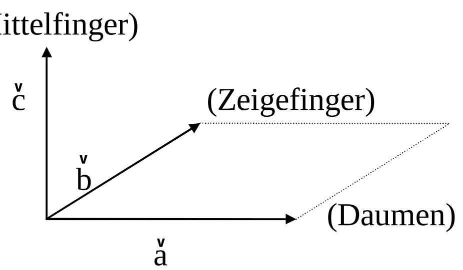


<u>Def.:</u> Das Vektorprodukt (=äußeres Produkt oder Kreuzprodukt) der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, die den Winkel α einschließen ist der Vektor $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ mit

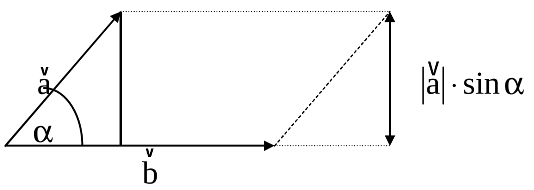
1. $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\alpha$ (Parallelogrammfläche)

2. $\vec{c} \perp \vec{a}$ und $\vec{c} \perp \vec{b}$

3. Die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtshandsystem



zu **1.**

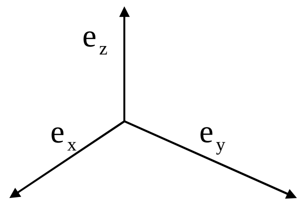


Rechengesetze

Distributivgesetze	$\vec{a}x(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}x\vec{b} + \vec{a}x\vec{c}$ $(\vec{a}+\vec{b})x\vec{c} = \vec{a}x\vec{c} + \vec{b}x\vec{c}$
Anti kommutativgesetz	$\vec{a}x\vec{b} = -(\vec{b}x\vec{a})$
Skalar-Multiplikation	$\lambda \cdot (\vec{a}x\vec{b}) = (\lambda \cdot \vec{a})x\vec{b} = \vec{a}x(\lambda \cdot \vec{b})$

Berechnung des Vektorproduktes in orthogonalen Koordinaten

Bsp.:



Sei $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$

$$\vec{a}x\vec{b} = (a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z)x(b_x\vec{e}_x + b_y\vec{e}_y + b_z\vec{e}_z) = ?$$

Vektorprodukte der Basisvektoren

$$\vec{e}_x x\vec{e}_x = \vec{e}_y x\vec{e}_y = \vec{e}_z x\vec{e}_z = \vec{0} \qquad (\text{da } \sin 0° = 0)$$
$$\vec{e}_x x\vec{e}_y = \vec{e}_z \qquad (\text{zeigt in z - Richtung } |\vec{e}_x|x|\vec{e}_y| \cdot \sin 90° = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1)$$
$$\vec{e}_y x\vec{e}_z = \vec{e}_x$$
$$\vec{e}_z x\vec{e}_x = \vec{e}_y$$

Somit

$$\vec{a}x\vec{b} = a_x \cdot b_x(\underbrace{\vec{e}_x x\vec{e}_x}_{=\vec{0}}) + a_x b_y(\underbrace{\vec{e}_x x\vec{e}_y}_{=\vec{e}_z}) + a_x b_z(\underbrace{\vec{e}_x x\vec{e}_z}_{=-\vec{e}_y}) +$$
$$a_y \cdot b_x(\underbrace{\vec{e}_y x\vec{e}_x}_{=-\vec{e}_z}) + a_y b_y(\underbrace{\vec{e}_y x\vec{e}_y}_{=\vec{0}}) + a_y b_z(\underbrace{\vec{e}_y x\vec{e}_z}_{=\vec{e}_x}) +$$
$$a_z \cdot b_x(\underbrace{\vec{e}_z x\vec{e}_x}_{=\vec{e}_y}) + a_z b_y(\underbrace{\vec{e}_z x\vec{e}_y}_{=-\vec{e}_x}) + a_z b_z(\underbrace{\vec{e}_z x\vec{e}_z}_{=\vec{0}}) =$$

$$= a_x b_y\vec{e}_z - a_x b_z\vec{e}_y - a_y b_x\vec{e}_z + a_y b_z\vec{e}_x + a_z b_x\vec{e}_y - a_z b_y\vec{e}_x$$
$$= (a_y b_z - a_z b_y)\vec{e}_x + (a_z b_x - a_x b_z)\vec{e}_y + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{e}_z$$
$$= \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

Zusammenfassung
Berechnung des Vektorproduktes in orthogonalen Vektorkoordinaten

$$\vec{a} x \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

Bsp.:

1. Wie groß ist der Flächeninhalt des von den Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und

$\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ aufgespannten Parallelogramms ?

$$\vec{a} x \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2)\cdot(-3) - 1\cdot 2 \\ 1\cdot(-1) - 3\cdot(-3) \\ 3\cdot 2 - (-2)\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-2 \\ -1+9 \\ 6-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Fläche} = \left|\vec{a} x \vec{b}\right| = \sqrt{4^2 + 8^2 + 4^2} = \sqrt{96} = \sqrt{16\cdot 6} = 4\cdot\sqrt{6}$$

2. Drehmoment $\vec{M} = \vec{r} x \vec{F}$

Die Kraft $\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ greift im Punkt $\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Gesucht $\vec{M}$ =?

$$\vec{M} = \vec{r} x \vec{F} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdot 0 - 0\cdot 3 \\ 0\cdot 0 - 2\cdot 0 \\ 2\cdot 3 - 0\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

<u>Formale Darstellung des Vektorproduktes</u>

Sei $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$ dann läßt sich das Vektorprodukt wie folgt darstellen

$$\vec{a} x \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

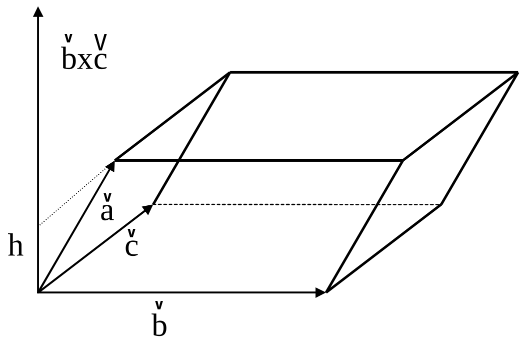
Bsp.: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

$$\vec{a} x \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \vec{e}_x \cdot (6-2) - \vec{e}_y(-9-(-1)) + \vec{e}_z(6-2)$$

$$\vec{a} x \vec{b} = 4\vec{e}_x + 8\vec{e}_y + 4\vec{e}_z = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

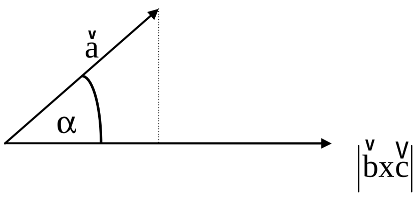
Spatprodukt

Es seien $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ dreidimensionale Vektoren. Wir betrachten den von den Vektoren aufgespannten Körper (Parallelepiped, Spat)



Volumen des Spats : Grundfläche · Höhe
Grundfläche (Parallelogram) $|\vec{b} x \vec{c}|$

Volumen $|\vec{a}| \cdot \cos\alpha \cdot |\vec{b} x \vec{c}|$



Skalarprodukt $\vec{a} \cdot (\vec{b} x \vec{c}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b} x \vec{c}| \cdot \cos\alpha$

Def.: Unter dem Spatprodukt $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]$ versteht man das Skalarprodukt der Vektoren $\vec{a}$ mit dem Ergebnisvektor des Vektorproduktes $\vec{b} x \vec{c}$

$$[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} x \vec{c})$$

Geometrische Interpretation :
Das Volumen des von den Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ aufgespannten Spats ist gleich dem Betrag des Spatproduktes $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]$.

Bsp.: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}] = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{x} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -12$$

$$\text{Volumen} = \left|[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]\right| = |12| = 12$$

Zusammenfassung der Vektoroperationen

* Addition, Subtraktion und Skalarmultiplikation von Vektoren erfolgen Komponentenweise

Bsp.: $\vec{a} + \vec{b} - \lambda\vec{c} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 - \lambda c_1 \\ a_2 + b_2 - \lambda c_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n - \lambda c_n \end{pmatrix}$

* Skalarprodukt

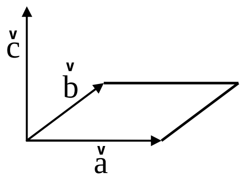
$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \ldots + a_n b_n$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha$ Projektion von $\vec{a}$ auf $\vec{b}$ (bzw. umgekehrt)

Skalarprodukt ist maximal bei parallelen Vektoren und 0 bei zueinander senkrechten Vektoren.
Bsp.: Arbeit einer Kraft $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$

* Vektorprodukt

$\vec{a} x \vec{b}$



$\vec{c} = \vec{a} x \vec{b}$

$\vec{c}$ ist ein Vektor

$\vec{c} \perp \vec{a}$ und $\vec{c} \perp \vec{b}$

$|\vec{c}|$ entspricht Fläche des Parallelogramms das von den Vektoren $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannt wird

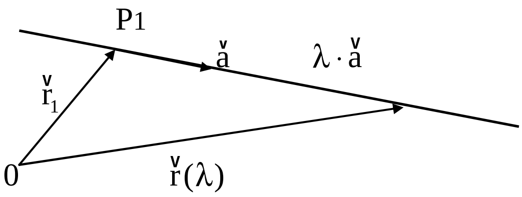
$|\vec{c}| = |\vec{b}| \cdot |\vec{a}| \cdot \sin\alpha$

$\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ bilden Rechtshandsystem

Das Vektorprodukt ist maximal bei zueinander senkrechten Vektoren und 0 bei parallelen Vektoren.
Bsp.: Drehmoment $\vec{M} = \vec{r} x \vec{F}$

Anwendung in der Geometrie

Darstellung einer Geraden



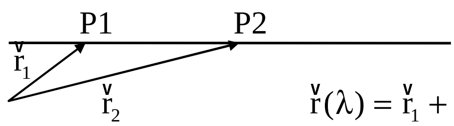
$\vec{r}(\lambda) = \vec{r}_1 + \lambda \cdot \vec{a}$

(Punkt-Richtungs Form)

Bsp.: Gerade durch P1=(1;-2;3) in Richtung von $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

$$r(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\lambda \\ -2+4\lambda \\ 3+5\lambda \end{pmatrix}$$

Gerade durch P1 und P2

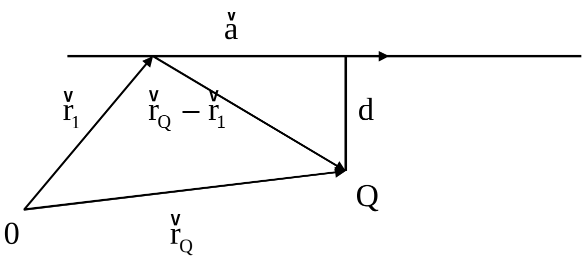


$\vec{r}(\lambda) = \vec{r}_1 + \lambda \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$ Zwei - Punkte - Form

Bsp.: Gerade durch P1=(2;3;4) und P2=(-1;-2;-3)

$$\vec{r}(\lambda) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \left(\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2+\lambda(-3) \\ 2+\lambda(-5) \\ 4+\lambda(-7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-3\lambda \\ 3-5\lambda \\ 4-7\lambda \end{pmatrix}$$

Abstand eines Punktes von einer Geraden



Gerade: $\vec{r}(\lambda) = \vec{r}_1 + \lambda \cdot \vec{a}$

$$\left|\vec{a} x (\vec{r}_Q - \vec{r}_1)\right| = \left|\vec{a}\right| \cdot d$$

$$d = \frac{\left|\vec{a} x (\vec{r}_Q - \vec{r}_1)\right|}{\left|\vec{a}\right|}$$

Bsp.: Gerade durch P1=(3;5;0) P2=(8;4;0)
Q=(4;1;0)

$$\vec{a} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$d = \frac{\left| \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 4-3 \\ 1-5 \\ 0-0 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{25+1}} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{26}} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5\cdot(-4)-(-1)\cdot 1 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{26}} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -19 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{26}} = \frac{19}{\sqrt{26}}$$

Schnittpunkt und Schnittwinkel zweier Geraden

Sei $\vec{r}_1(\lambda_1) = \vec{r}_1 + \lambda_1 \vec{a}_1 \qquad \vec{r}_2(\lambda_2) = \vec{r}_2 + \lambda_2 \vec{a}_2$

Schnittpunkt: $\vec{r}_1(\lambda_1^*) = \vec{r}_2(\lambda_2^*)$ für zu bestimmende λ_1^* und λ_2^*
d.h.

$$\boxed{\vec{r}_1 + \lambda_1 \vec{a}_1 = \vec{r}_2 + \lambda_2 \vec{a}_2}$$

Ist bei GLS für Parameter λ_1 und λ_2
Lsg. des GLS λ_1^* und λ_2^* ist Schnittpunkt.

Schnittwinkel: Ist der Winkel zwischen den Richtungsvektoren, falls sich Geraden schneiden.

$$\varphi = \arccos\left(\frac{\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2}{|\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2|} \right)$$

Bsp.: Gegeben sind die Geraden (Bsp.: s. Papula 1 - S.84-85)

$$g_1: \quad r(k_1) = \vec{r}_1 + k_1 \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und

$$g_2: \quad r(k_2) = \vec{r}_2 + k_2 \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Wir berechnen Schnittpunkt S und Schnittwinkel φ:
Gleichsetzen:

$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + k_1\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} \qquad \text{oder:} \quad \begin{aligned} 1 + 2k_1 &= 2 + k_2 \\ 1 + k_1 &= 0 - k_2 \\ 0 + k_1 &= 2 + 2k_2 \end{aligned}$$

Lösung des Lin. Gls.: $k_1 = 0$ und $k_2 = -1$

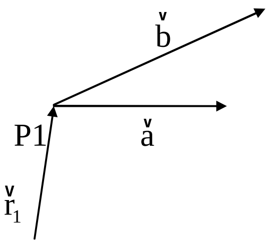
Somit erhalten für S: $\vec{r}_s = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ d.h. S = (1; 1; 0)

Schnittwinkel φ:

$$a_1 * a_2 = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} = 3 \qquad |a_1| = \sqrt{6} \qquad |a_2| = \sqrt{6}$$

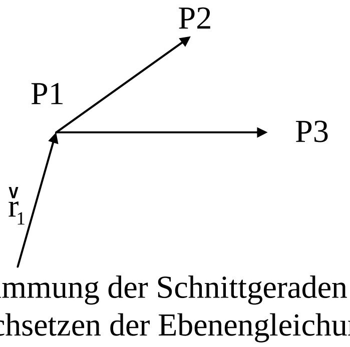
$$\varphi = \arccos\left(\frac{3}{6}\right) = 60^o$$

<u>Vektorielle Darstellung einer Ebene</u>



$$\vec{r}(P) = \vec{r}(\lambda;\mu) = \vec{r}_1 + \lambda\vec{a} - \mu\vec{b}$$
$$\mu, \lambda \in R$$

oder



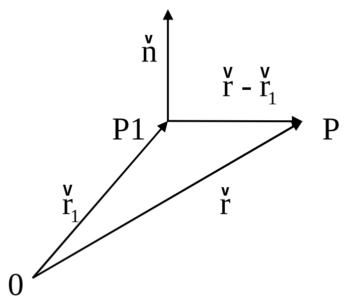
$$\begin{aligned}\vec{r}(\lambda;\mu) &= \vec{r}_1 + \lambda\overline{P_1P_2} - \mu\overline{P_1P_3} \\ &= \vec{r}_1 + \lambda(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) + \mu(\vec{r}_3 - \vec{r}_1)\end{aligned}$$

Bestimmung der Schnittgeraden von 2 Ebenen:
Gleichsetzen der Ebenengleichungen => Vektorgleichung
Lösung des entstehenden linearen Gleichungssystems

<u>Gleichung einer Ebene senkrecht zu einem Vektor</u>

Gesucht : Ebene durch P1, die senkrecht zu $\vec{n}$ steht.

Sei P bel. Ebenenpunkt, dann $\vec{n} \perp (\vec{r} - \vec{r}_1)$
d.h. Skalarprodukt = 0
$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_1) = 0$



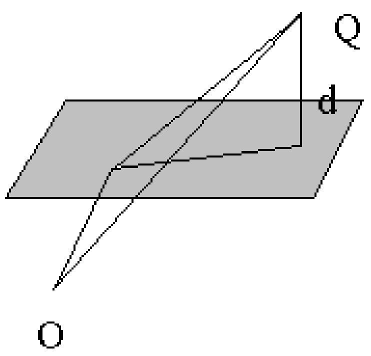
$$\text{mit } \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}$$

$$0 = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_1 \\ y - y_1 \\ z - z_1 \end{pmatrix} = n_x(x - x_1) + n_y(y - y_1) + n_z(z - z_1) = 0$$

1. Gleichung für die Unbekannte x,y,z
Lsg. gibt alle Punkte der Ebene.

Abstand eines Punktes von einer Ebene

Die Ebene sei durch $\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_1) = 0$ gegeben



$$d * |\vec{n}| = |(\vec{r}_Q - \vec{r}_1) * \vec{n}| \qquad \Rightarrow \qquad d = \frac{|(\vec{r}_Q - \vec{r}_1) * \vec{n}|}{|\vec{n}|}$$