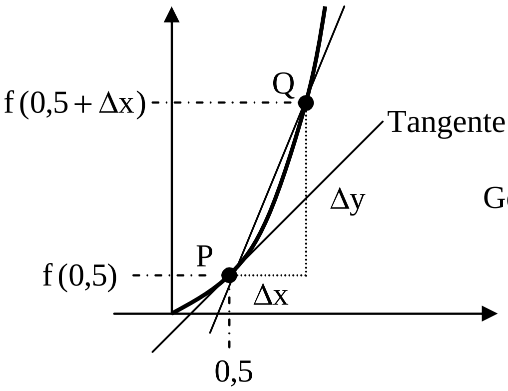
5. Differentialrechnung

5.1. Grundlagen

Bsp.:

$$f(x) = x^2$$

Frage: Welche Steigung hat die Tangente in einem Punkt $P = (x_0; f(x_0))$



Gesucht: Steigung der Tangente in $x_0 = 0{,}5$ d.h. $P(0{,}5; 0{,}25)$

<u>Idee :</u> Wir bestimmen einen Näherungswert und verbessern diesen Näherungswert solange, bis wir einen hinreichend guten Wert erhalten (Anm.: Man denke z.B. an die Nullstellenbestimmung mit der Regula Falsi).

<u>**1. Schritt:**</u> Bestimmung eines Näherungswertes

<u>Frage :</u> Wie bestimmt man einen Näherungswert ?
(wichtig: man muß diesen Wert berechnen können)

Gegeben ist lediglich die Funktionsgleichung f(x), d.h. "Punkte" im x-y-Koordinatensystem.
Wähle Q≠P und bilde Sekante durch Punkt P und Q. Dann sei die
<u>*Sekantensteigung der Näherungswert für die Tangentensteigung*</u>

Hierbei wurde verwendet, daß die Sekantensteigung (Steigung einer Geraden) berechenbar ist.

<u>**Berechnen der Sekantensteigung**</u>

$$\text{Steigungsdreieck}: m(\Delta x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad (\Delta x \ \text{ Lese}: \text{delta } x)$$

$\Delta x; \Delta y$ sind durch P und Q gegeben

$$P = (0{,}5; f(0{,}5)) = (0{,}5; 0{,}25)$$

$$Q = (0{,}5 + \Delta x; f(0{,}5 + \Delta x)) = (0{,}5; (0{,}5 + \Delta x)^2)$$

Somit :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(0{,}5+\Delta x) - f(0{,}5)}{\Delta x} = \frac{(0{,}5+\Delta x)^2 - 0{,}25}{\Delta x}$$

$$= \frac{0{,}25+\Delta x+(\Delta x)^2 - 0{,}25}{\Delta x} = 1+\Delta x$$

d.h. Steigung der Sekante durch Punkt P und $Q = 1+\Delta x$

<u>Bsp.:</u> $\Delta x = 1$ d.h. Q = (1,5 ; f(1,5)) = (1,5 ; 2,25)
$\Rightarrow$Sekante durch P = (0,5 ; 0,25) und Q = (1,5 ; 2,25) hat die
Steigung : $1+\Delta x=1+1=2$

<u>2. Schritt :</u> Verbesserung des Näherungswertes

Wenn sich der Punkt Q dem Punkt P nähert, so erhält man bessere Näherungswerte.
Q nähert sich P bedeutet :

$Q = (0{,}5+\Delta x\,; f(0{,}5+\Delta x))$

$P = (0{,}5\,; f(0{,}5))$

d.h. $0{,}5+\Delta x \to 0{,}5$ bzw. $\Delta x \to 0$

Wir betrachten somit den Grenzwert :

$$\lim_{\Delta x\to 0} \underbrace{m(\Delta x)}_{\text{Sekantensteigung}} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} 1+\Delta x = 1$$

d.h. Wähle bel. Folge $< \Delta x_n >$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} \Delta x_n = 0$ und berechne $m(\Delta x_n)$ (Sekantensteigung).

Gilt dann $\lim\limits_{n\to\infty} m(\Delta x_n) = g$, d.h. der Grenzwert existiert für jede mögliche Folge $< \Delta x_n >$ und der Grenzwert ist unabhängig von der speziellen Wahl von Δx_n dann gilt $\lim\limits_{\Delta x\to 0} m(\Delta x) = g$.

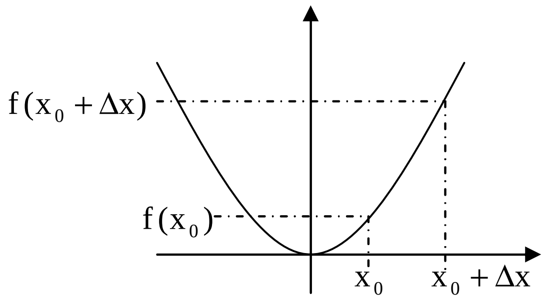
In unserem Fall wähle z.B. $\Delta x_n = \frac{1}{n} \to 0 \quad (n\to\infty)$

dann $m(\Delta x_n) = \frac{\Delta y}{\Delta x_n} = 1+\Delta x_n = 1+\frac{1}{n} \to 1 \quad (n\to\infty)$

Der Grenzwert der Sekantensteigungen ist die Tangentensteigung
d.h. Die Parabel $f(x)=x^2$ hat in P(0,5 ; 0,25) eine Tangente mit der Steigung 1.
Wir schreiben : $f'(0{,}5)=1$

Bestimmung der Tangentensteigung von $f(x)=x^2$ für ein bel x_0

Sei x_0 (bel) fest $\quad f(x) = x^2$



Sekantensteigung :

$$m(x_0) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{(x_0 + \Delta x) - x_0} = \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} =$$

$$= \frac{x_0^2 + 2x_0 \cdot \Delta x + \Delta x^2 - x_0^2}{\Delta x} = \frac{2x_0 \cdot \Delta x + \Delta x^2}{\Delta x}$$

$$= 2x_0 + \Delta x$$

Die Tangentensteigung ergibt sich als Grenzwert

$$\lim_{\Delta x \to 0} m(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} 2x_0 + \Delta x = 2x_0$$

Somit

Die Steigung der Tangente in $(x_0; f(x_0))$ der Normalparabel $f(x) = x^2$ ist $f'(x) = 2x$

$f'(x)$ heißt Ableitung der Funktion $f(x)$

<u>Bsp.:</u>

(1.)

$x_0 = 1 \quad f'(1) = 2 \cdot 1 = 2 \quad$ d.h. Tangentenstg. in $x_0 = 1$ ist 2

$x_0 = 0 \quad f'(0) = 2 \cdot 0 = 0 \quad$ d.h. Tangentenstg. in $x_0 = 0$ ist 0

$x_0 = -1 \quad f'(-1) = 2 \cdot (-1) = -2 \quad$ d.h. Tangentenstg. in $x_0 = -1$ ist - 2

(2.)

In welchem Punkt $P(x_0 / y_0)$ hat die Parbel $f(x) = x^2$ die Steigung 6 ?

$$f'(x_0) = 2 \cdot x_0 \stackrel{!}{=} 6 \Leftrightarrow x_0 = \frac{6}{2} \Leftrightarrow x_0 = 3$$

$y_0 = x_0^2 = 3^2 = 9 \quad$ Somit $P(x_0 / y_0) = (3/9)$

Def.:

Die Funktion $y = f(x)$ sei in einem Intervall (a,b) das x_0 enthält definiert.
$f(x)$ heißt an der Stelle x_0 differenzierbar, falls der Grenzwert

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

existiert.(Dies ist der Grenzwert der Sekantengleichungen)
Der Grenzwert heißt Ableitung (bzw. Differentialquotient) der Funktion $y = f(x)$ an der Stelle x_0.

Wir schreiben: $f'(x_0)$ oder $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$

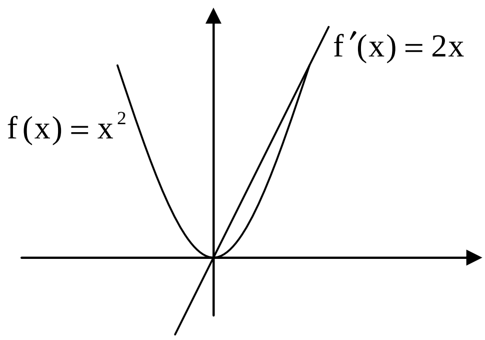
Def.:

Ist y=f(x) an jeder Stelle x des Intervalls (a,b) differenzierbar, d.h. existiert an jeder Stelle die Ableitung $f'(x)$, so heißt f(x) im Intervall (a,b) differenzierbar.
$\Rightarrow f'(x)$ heißt Ableitungsfunktion

5.1. Ableitung elementarer Funktionen

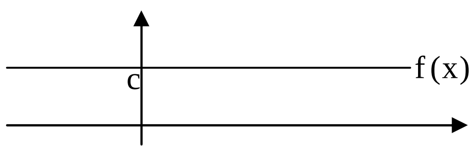
Bsp.:
(1.)

$f(x) = x^2 \qquad f'(x) = 2x$



(2.)

$f(x) = c \qquad c \in R \quad \text{const.}$

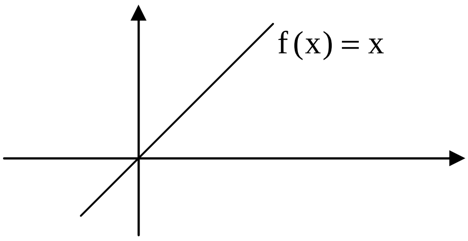


$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c - c}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0$$

Somit: Ableitungsfunktion von $f(x) = c$ ist $f'(x) = 0$

(3.)

$f(x) = x$



$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 1 = 1$$

Somit : Ableitungsfunktion von $f(x) = x$ ist $f'(x) = 1$

(4.)

$f(x) = ax + b$ (allg.Geradengleichung)

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a(x+\Delta x) + b - (ax+b)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{ax + a \cdot \Delta x + b - ax - b}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} a = a$$

Somit : Ableitungsfunktion von $f(x) = ax + b$ ist $f'(x) = a$

d.h. a ist die Steigung der Gerade.

(5.)

$f(x) = x^n$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$$

$$\underset{\substack{\text{bin.}\\\text{Formel}}}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} \cdot \Delta x + \binom{n}{2} x^{n-2} \cdot (\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\binom{n}{1} x^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} \cdot (\Delta x) + \ldots + (\Delta x)^{n-1} \right]$$

$$\underset{\substack{\text{Grenzwert einer}\\\text{Summe ist Summe}\\\text{der Grenzwerte}}}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \binom{n}{1} x^{n-1} + \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \binom{n}{2} x^{n-2} \cdot (\Delta x)}_{=0} + \ldots + \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} (\Delta x)^{n-1}}_{=0}$$

$$= \binom{n}{1} x^{n-1} = n \cdot x^{n-1}$$

Somit : Ableitungsfunktion von $f(x) = x^n$ ist $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

Bsp.:

$$f(x) = x \qquad f'(x) = 1 \cdot x^0 = 1$$
$$f(x) = x^2 \qquad f'(x) = 2 \cdot x$$
$$f(x) = x^{10} \qquad f'(x) = 10 \cdot x^9$$
$$f(x) = 4 \cdot x^7 \qquad f'(x) = 4 \cdot 7x^6 = 28x^6$$

(6.)

$$f(x) = \sin$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = ? \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = ?$$

Vorbereitung

Additionstheorem : $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta$

Nebenrechnung : $\alpha + \beta = x + \Delta x$ und $a - \beta = x$

$\Rightarrow$ Setze : $\alpha = x + \frac{\Delta x}{2}$ $\quad \beta = \frac{\Delta x}{2}$ dann

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(x+\Delta x) = \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\Delta x}{2}\right) + \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$- \quad \sin(\alpha-\beta) = \sin x \qquad = \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\Delta x}{2}\right) - \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$\sin(x+\Delta x) - \sin x \qquad = 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \qquad (*)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \frac{2}{\Delta x} \cdot \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)\right]$$

$$= \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}_{=\cos x \text{ (da } \cos x \text{ stetig}} \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{2}{\Delta x} \cdot \sin\frac{\Delta x}{2}}_{=?} \qquad (**)$$

Gesucht :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{2}{\Delta x} \cdot \sin\frac{\Delta x}{2} = ? \qquad \text{Anm.: } \Delta x \text{ ist im Bogenmaß}$$

Setze $z = \frac{\Delta x}{2}$ dann

$$\lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = ? \qquad z \text{ im Bogenmaß}$$

Vermutung :

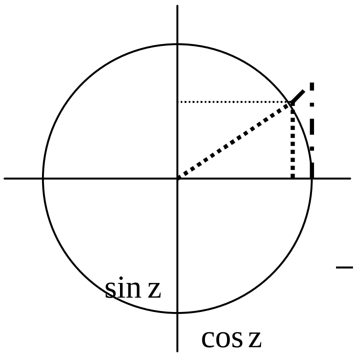
$$\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}=1$$

da für kleine Winkel die Länge des Bogens z fast gleich der Länge der Strecke sin z ist.

Tabelle :

α (Grad)	10°	5°	1°
z Bogenmaß	0,175	0,0873	0,0175
sin z	0,174	0,0872	0,0175
sin z /z	1,006	1,001	1

Flächenvergleich



$$F=\frac{\cos z\cdot\sin z}{2}=\frac{1\cdot\tan z}{2}$$

$$F=\text{Kreisfläche}\cdot\frac{z}{2\pi}=\pi r^2\cdot\frac{z}{2\pi}=z$$

$$F\le F_{\text{Punkt-Linie}}\le F_{\text{Strich-Punkt-Linie}}$$

d.h. $$\frac{\cos z\cdot\sin z}{2}\le\frac{z}{2}\le\frac{\tan z}{2}$$

$$\Leftrightarrow\quad \cos z\cdot\sin z\le z\le\frac{\sin z}{\cos z}\qquad /:\sin z$$

$$\Leftrightarrow\quad \cos z\le\frac{z}{\sin z}\le\frac{1}{\cos z}$$

$$\underbrace{\lim_{z\to 0}\cos z}_{=1}\le\lim_{z\to 0}\frac{z}{\sin z}\le\lim_{z\to 0}\underbrace{\frac{1}{\cos z}}_{=1}$$

Somit

$$\lim_{z\to 0}\frac{z}{\sin z}=1$$

Einsetzen in (**) ergibt

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=\cos x\cdot 1=\cos x$$

Somit Ableitungsfunktion von $f(x)=\sin x$ ist $f'(x)=\cos x$

Ableitung der elementaren Funktion siehe L. Papula S.261

Bsp.:

$f(x) = \cos x \qquad f'(x) = ?$

Bekannt ist $(\sin x)' = \cos x$

Verwende $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

d.h. die Ableitung von cos x an der Stelle x_0 ist gleich der Ableitung von sin x an der Stelle $x_0 + \frac{\pi}{2}$.

Somit

$$(\cos x)' = \left(\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$$

d.h. $f'(x) = -\sin x$

Näherungsrechnung für die Ableitung

Verwende Differentialquotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

Falls Δx hinreichend klein ist, so liefert dies einen guten Näherungswert.

Bsp.:

$f(x) = e^x \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{e^{(x+\Delta x)} - e^x}{\Delta x}$

Sei $x_0 = 1$

$\Delta x = 0{,}01 \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{e^{1{,}01} - e^1}{0{,}01} = 2{,}73192$

$\Delta x = 0{,}001 \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{e^{1{,}001} - e^1}{0{,}001} = 2{,}7196$

Somit $f'(1) \cong 2{,}7196 \approx e^1$

genau : $f'(1) = e$

Berechnung von Näherungswerten an anderen Stellen x_0 liefert

Vermutung $f'(x) = e^x$

5.3. Ableitung von Summe, Produkt und Quotient

Sei $f(x) = x^5 + \sin x \qquad f'(x) = ?$

Allg. $f(x) = f_1(x) + f_2(x) \qquad f'(x) = ?$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_1(x+\Delta x) + f_2(x+\Delta x) - (f_1(x) + f_2(x))}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_1(x+\Delta x) - f_1(x) + f_2(x+\Delta x) - f_2(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_1(x+\Delta x) - f_1(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_2(x+\Delta x) - f_2(x)}{\Delta x}$$

Somit $f'(x) = \qquad f_1'(x) \qquad + \qquad f_2'(x)$

Bsp.: $f(x) = x^5 + \sin x \;\rightarrow\; f'(x) = 5x^4 + \cos x$

Ableitung der Differenz erfolgt analog.

<u>Zusammenfassung : Summenregel</u>

Bei einer endlichen Summe (Differenz) wird gliedweise differenziert

$$f(x) = f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_n(x)$$
$$f'(x) = f_1'(x) \pm f_2'(x) \pm \ldots \pm f_n'(x)$$

<u>Bsp.:</u>

(1.)

$$f(x) = 3x^6 + \sin x + e^x + \ln x$$

$$f'(x) = 18x^5 + \cos x + e^x + \frac{1}{x}$$

(2.)

$$f(x) = \sin x - \cos x$$
$$f'(x) = \cos x - (-\sin x) = \cos x + \sin x$$

(3.)

Sei $f(x) = x^4 \cdot \sin x \qquad f'(x) = ?$

Allg. $f(x) = g(x) \cdot h(x) \qquad f'(x) = ?$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) \cdot h(x+\Delta x) - g(x) \cdot h(x)}{\Delta x}$$

Addition und gleichzeitig Subtraktion von $g(x)\cdot h(x+\Delta x)$ ergibt

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)\cdot h(x+\Delta x)-g(x)\cdot h(x+\Delta x)+g(x)\cdot h(x+\Delta x)-g(x)\cdot h(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{[g(x+\Delta x)-g(x)]\cdot h(x+\Delta x)+g(x)\cdot[h(x+\Delta x)-h(x)]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\cdot h(x+\Delta x)+g(x)\cdot\frac{h(x+\Delta x)-h(x)}{\Delta x}\right]$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\cdot h(x+\Delta x)\right]+\lim_{\Delta x\to 0}\left[g(x)\cdot\frac{h(x+\Delta x)-h(x)}{\Delta x}\right]$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}h(x+\Delta x)+\lim_{\Delta x\to 0}g(x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{h(x+\Delta x)-h(x)}{\Delta x}$$

$$= \quad g'(x) \quad\cdot\quad h(x) \quad+\quad g(x)\quad\cdot\quad h'(x)$$

Zusammenfassung : Produktregel

Die Ableitung des Produktes $f(x)=g(x)\cdot h(x)$
ist $f'(x)=g'(x)\cdot h(x)+g(x)\cdot h'(x)$

Bsp.:

(1.)

$$f(x)=x^4\cdot\sin x$$
$$f'(x)=(x^4)'\cdot\sin x+(x^4)\cdot(\sin x)'$$
$$f'(x)=4x^3\cdot\sin x+x^4\cdot\cos x$$

(2.)

Spezialfall : $f(x)=c\cdot g(x)$ $\quad c\in R$ konst.

$$f'(x)=(c)'\cdot g(x)+c\cdot g'(x)=c\cdot g'(x)$$

d.h. Ein konstanter Faktor bleibt beim Differenzieren erhalten

(3.)

$$f(x)=4x^5+2x^3+x+1$$
$$f'(x)=20x^4+6x^2+1$$

(4.)

$$P(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x^1+a_0 \quad \text{(Polynom)}$$
$$P'(x)=n\cdot a_n x^{n-1}+(n-1)\cdot a_{n-1}x^{n-2}+\ldots+1\cdot a_1x^0$$

(5.)

$$f(x) = \sin x \cdot \cos x$$
$$f'(x) = \cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot (-\sin x)$$
$$f'(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

(6.)

$$\begin{aligned} f(x) &= 5x^3 \cdot \sin x \cdot e^x \\ f'(x) &= (5x^3)' \cdot (\sin x \cdot e^x) + 5x^3 \cdot (\sin x \cdot e^x)' \\ &= 3 \cdot 5x^2 \cdot \sin x \cdot e^x + 5x^3 \cdot \left[\cos x \cdot e^x + \sin x \cdot e^x\right] \\ &= 15x^2 \cdot \sin x \cdot e^x + 5x^3 \cdot \cos x \cdot e^x + 5x^3 \cdot \sin x \cdot e^x \end{aligned}$$

(d.h. Ableitung eines Produktes aus 3 Faktoren ist

$f(x) = u \cdot v \cdot w \Rightarrow f'(x) = u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot w'$)

Sei $f(x) = \dfrac{\sin x}{x^4}$ $\qquad f'(x) = ?$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x \cdot \frac{1}{x^4} = \sin x \cdot (x^{-4}) \\ f'(x) &= (\sin x)' \cdot (x^{-4}) + \sin x \cdot (x^{-4})' \\ &= \frac{\cos x}{x^4} + \sin x \cdot (-4) \cdot (x^{-5}) \\ &= \frac{\cos x}{x^4} - \frac{4 \cdot \sin x}{x^5} = \frac{(\cos x) \cdot x^4}{x^8} - \frac{\sin x \cdot (4x)^3}{x^8} \\ &= \frac{(\cos x) \cdot x^4 - (\sin x) \cdot (4x)^3}{x^8} \\ &= \frac{(\sin x)' \cdot x^4 - \sin x \cdot (x^4)'}{(x^4)^2} \end{aligned}$$

<u>Allgemein : Quotientenregel</u>

Die Ableitung einer Quotientenfunktion $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$

erhält man wie folgt

$$f'(x) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{h^2(x)}$$

<u>Anm.:</u> Die allgemeine Herleitung erfolgt in Analogie zu dem obigen Beispiel unter Verwendung der Produktregel.

Bsp.:

(1.)

$$f(x) = \tan x \qquad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Somit:

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \quad \text{mit} \quad g(x) = \sin x \quad g'(x) = \cos x$$

$$h(x) = \cos x \quad h'(x) = -\sin x$$

$$f'(x) = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad \text{da } \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \text{ (Pythagoras)}$$

(2.)

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 1}{x^4 + 2}$$

$$f'(x) = \frac{(2x+3)\cdot x^4 + 2 - (x^2 + 3x + 1)\cdot(4x^3)}{(x^4+2)^2}$$

5.4. Ableitung einer zusammengesetzten Funktion

Bsp.:

$$f(x) = 3\cdot\sin(5x) \qquad f'(x) = ?$$

Allg.: $f(x) = g(u(x))$

Hier: $g(u) = 3\cdot\sin u \qquad u = u(x) = 5x$

Setze $u = u(x)$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(u(x+\Delta x)) - g(u(x))}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{[g(u(x+\Delta x)) - g(u(x))]\cdot[u(x+\Delta x) - u(x)]}{[u(x+\Delta x) - u(x)]\cdot\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(u(x+\Delta x)) - g(u(x))}{u(x+\Delta x) - u(x)}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x}$$

Somit:

$$f'(x) = g'(u)\cdot u'(x) \qquad \text{mit} \quad g'(u) = \frac{d\,g(u)}{du}$$

Bsp.:

$$f(x) = 3 \cdot \sin(5x)$$

Setze $u = 5x$

Äußere Funktion : $y = g(u) = 3 \cdot \sin u$

Innere Funktion : $u = u(x) = 5x$

Ableitungen : Äußere : $g'(u) = \frac{dy}{du} = 3 \cdot \cos u$

Innere : $u'(x) = \frac{du}{dx} = 5$

Somit

$$f'(x) = g'(u) \cdot u'(x) = (3 \cdot \cos u) \cdot 5 = 15 \cdot \cos 5x$$

Zusammenfassung : Kettenregel

Die Ableitung einer zusammengesetzten Funktion $y = f(x) = g(u(x))$ erhält man als Produkt von äußerer und innerer Ableitung

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = g'(u) \cdot u'(x)$$

Merkregel : $\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}}$

Bsp.:

(1.)

$$f(x) = e^{3x^4+5}$$

Setze $u(x) = 3x^4 + 5$ $\qquad \frac{du}{dx} = 12x^3$

$$f(u) = e^u$$

$$f'(u) = e^u$$

Somit $f'(x) = (e^{3x^4+5}) \cdot (12x^3)$

(2.)

$$f(x) = \ln(\cos(x^2 - 1))$$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos(x^2-1)} \cdot (\cos(x^2-1))'$$

$$= \frac{1}{\cos(x^2-1)} \cdot \left[-\sin(x^2-1)\right] \cdot 2x$$

$$= -\frac{\sin(x^2-1)}{\cos(x^2-1)} \cdot 2x = -(\tan(x^2-1)) \cdot (2x)$$

(3.)

$$f(x) = 5 \cdot \ln(x^4 + 2)$$

$$f'(x) = 5 \cdot \frac{1}{x^4 + 2} \cdot (4x^3) = \frac{20x^3}{x^4 + 2}$$

5.5. Höhere Ableitungen

Sei f(x) gegeben. Dann ist 1. Ableitung f´(x) eine Funktion.
Falls f´(x) differenzierbar ist, kann man die Ableitung von f´(x) bilden.

Bsp.:

$$f(x) = x^4$$

1.Ableitung $f'(x) = 4x^3$ ist diffbar.

2.Ableitung $f''(x) = 12x^2$ ist diffbar.

3.Ableitung $f'''(x) = 24x^1$ ist diffbar.

Allg.

n - te Ableitung $f^{(n)}(x) = \frac{d}{dx} f^{(n-1)}(x)$

d.h. die n - te Ableitung von f(x) erhält man durch Ableiten der (n - 1) - ten Ableitung.

Bsp.:

(1.)

$$f(x) = 5x^2 - x \cdot \sin(x^2 + 1)$$

$$f'(x) = 10x - \left[1 \cdot \sin(x^2 + 1) + x \cdot \cos(x^2 + 1) \cdot 2x\right]$$

$$= 10x - \sin(x^2 + 1) - 2x^2 \cdot \cos(x^2 + 1)$$

$$f''(x) = 10 - 2x \cdot \cos(x^2 + 1) - 4x \cdot \cos(x^2 + 1) - 2x^2 \cdot (-\sin(x^2 + 1)) \cdot 2x$$

$$= 10 - 6x \cdot \cos(x^2 + 1) + 4x^2 \cdot \sin(x^2 + 1)$$

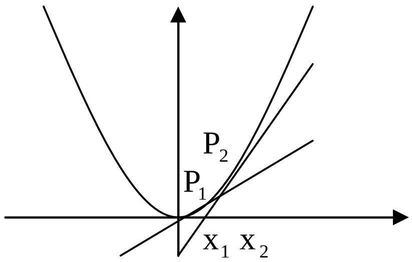
(2.)

$$f(x) = x^4$$

$f'(x) = 4x^3$ $f''(x) = 12x^2$ $f'''(x) 24x$ $f''''(x) 24$

$f'''''(x) = 0$ sowie alle anderen

Geometrische Interpretation von f´´(x)



Bsp.:

$f(x) = x^2$

$f'(x) = 2x$

$f'(x) > 0$ bedeutet, daß die Funktion in eine hinreichend kleine ε - Umgebung in x_0 monoton wachsend ist.

Wir betrachten : $f''(x) = 2$

$f''(x) > 0$ bedeutet, daß $f'(x)$ monoton wachsend ist

d.h. beispielsweise die Tangente in $P_2(1;1)$ eine größere Steigung als die Tangente in $P_1(0{,}5\,;0{,}25)$.

Dies bedeuten für f(x): Linkskrümmung

analog für $f(x) = -x^2$ $\quad f'(x) = -2x$ $\quad f''(x) = -2$

Somit hat f(x) Rechtskrümmung.

Zusammenfassung

Die 2. Ableitung der Funktion f(x) beschreibt das Krümmungsverhalten von f(x)

$f''(x) > 0$ bedeutet f(x) hat Linkskrümmung

$f''(x) < 0$ bedeutet f(x) hat Rechtskrümmung

Bsp.:

Gesucht ist das Krümmungsverhalten der Funktion

$f(x) = x^3 + 4x^2 - 5$

Bestimme: $f''(x)$: $\quad f'(x) = 3x^2 + 8x \quad f''(x) = 6x + 8$

Linkskrümmung : $f''(x) > 0$ d.h. $6x + 8 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{8}{6}$

Rechtskrümmung : $f''(x) < 0$ d.h. $6x + 8 < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{8}{6}$

Erstellen einer Skizze des Funktionsverlaufs

Wir betrachten folgende charakteristischen Informationen

a.) Verhalten gegen Unendlich
b.) Nullstellen
c.) Polstellen
d.) Definitionslücken
e.) Asymptoten
f.) Wendepunkt, Krümmungsverhalten
g.) Lokale Minima und maxima
d.h. alle Stellen x_0 mit $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) \neq 0$
falls $f''(x_0) > 0$ liegt ein lokales Minimum vor
falls $f''(x_0) < 0$ liegt ein lokales Maximum vor

Kurvenpunkte, in denen in denen sich der Drehsinn der Tangente ändert heißen Wendepunkte.
Hinreichende Bedingung:

f(x) hat an der Stelle x_0 einen Wendepunkt
falls $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$

Wendepunkte mit waagrechter Tangente heißen Sattelpunkte.

Bsp.:

(1.)

$$f(x) = x^3 + 2x$$
$$f'(x) = 3x^2 + 2$$
$$f''(x) = 6x$$
$$f'''(x) = 6$$

$f''(0) = 0$ und $f'''(0) = 6$ somit Wendepunkt

(2.)

$$f(x) = x^4$$
$$f'(x) = 4x^3$$
$$f''(x) = 12x^2$$
$$f'''(x) = 24x$$
$$f''''(x) = 24$$

$f(x)$ hat in $x_0 = 0$ ein lokales Minimum, aber $f''(0) = 0$

$f''''(x) > 0$ (4. Ableitung)

Def.:

Eine Funktion f(x) hat in x_0 eine waagrechte Tangente falls $f'(x_0) = 0$.

Die nächste nichtverschwindende Ableitung sei $f^{(n)}(x_0)$

(d.h. $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ aber $f^{(n-1)}(x_0) = 0$)

Ist n geradzahlig (d.h. $n \in \{2,4,6,8,\ldots\}$)

so gilt :

falls $f^{(n)}(x_0) > 0$ liegt relatives Minimum vor

falls $f^{(n)}(x_0) < 0$ liegt relatives Maximum vor.

Ist n ungeradzahlig so liegt ein Sattelpunkt vor.

Erstellen einer Funktionskizze

Bsp.:

$$f(x) = \frac{x^4 + 3x^3 - 4x^2 - 5x + 5}{x - 1}$$

a.) Verhalten gegen Unendlich

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^4 + 3x^3 - 4x^2 - 5x + 5}{x - 1}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3 + 3x^2 - 4x - 5 + \frac{5}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \pm\infty$$

b.) Nullstellen

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

Bedingung : $g(x) = 0$ und $h(x) \neq 0$

$g(x) = x^4 + 3x^3 - 4x^2 - 5x + 5$

$g(x) = 0$ Verfahren :* Raten

* oder Regula falsi

$g(1) = 1 + 3 - 4 - 5 + 5 = 0$

Polynomdivision :

$$\begin{array}{l}
(x^4 + 3x^3 - 4x^2 - 5x + 5) : (x - 1) = x^3 + 4x^2 - 5 \\
\underline{-(x^4 - x^3)} \\
\quad 4x^3 - 4x^2 \\
\quad \underline{-(4x^3 - 4x^2)} \\
\qquad\qquad -5x + 5 \\
\qquad\qquad \underline{-(-5x + 5)} \\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

$$g_1(x) = x^3 + 4x^2 - 5$$
$$g_1(1) = 0$$
$$g_2(x) = 0$$
$$\text{Polynomdivision}: g_2(x) = x^2 + 5x + 5$$
$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25-40}}{2} \qquad x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{5}}{2}$$
$$x_1 = -1{,}381966 \quad \text{auf 2 Stellen genau } x_1 = -1{,}38$$
$$x_2 = -3{,}618034 \quad \text{auf 2 Stellen genau } x_2 = -3{,}62$$

Linearfaktorzerlegung:
$$f(x) = \frac{(x-1)\cdot(x-1)\cdot(x+1{,}38)\cdot(x+3{,}62)}{(x-1)}$$
Nullstelle: $f(1)$ ist nicht definiert, $x_1 = -1{,}38 \quad x_2 = -3{,}62$

c.) Polstellen

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \qquad g(x_0) \neq 0 \text{ und } h(x_0) = 0$$
$$h(x_0) = 0 \quad x_0 = 1 \quad \text{aber } g(1) = 0 \Rightarrow \text{keine Polstelle}$$

d.) Definitionslücken

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \qquad g(x_0) = 0 \text{ und } h(x_0) = 0$$
$$x_0 = 1 \quad h(1) = 0 \text{ und } g(1) = 0$$
$$\text{d.h. } f(x) = x^3 + 4x^2 - 5 \qquad \text{für } x \neq 1$$

e.) Asymptoten

keine vertikalen Asymptoten, da keine Polstellen.

f.) Wendepunkte, Krümmungsverhalten

Wir betrachten statt der ursprünglichen Funktionsdarstellung die Darstellung:

$$f(x) = x^3 + 4x^2 - 5 \qquad \text{für } x \neq 1$$
$$f'(x) = 3x^2 + 8x \qquad f''(x) = 6x + 8 \qquad f'''(x) = 6$$
$$\text{Wendepunkt}: f''(x) = 0$$
$$6x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{8}{6} \quad \rightarrow f'''\left(-\frac{8}{6}\right) = 6$$
$$\text{Somit} \quad x_0 = -\frac{8}{6} \text{ ist Wendepunkt}$$

h.) relative Extremwerte

$$f'(x_0) = 0$$
$$3x^2 + 8x = 0 \Leftrightarrow x \cdot (3x + 8) = 0$$
$$x_1 = 0 \qquad f''(0) = 6 \cdot 0 + 8 > 0 \qquad \text{rel. Minimum}$$
$$x_2 = -\frac{8}{3} \qquad f''\left(-\frac{8}{3}\right) = 6 \cdot \left(-\frac{8}{3}\right) + 8 < 0 \quad \text{rel. Maximum}$$

Ergebnis der Analyse

$$f(x) = x^3 + 4x^2 - 5 \quad x \neq 1$$

a.) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$

b.) Nullstellen $x_1 = -1{,}38 \quad x_2 = -3{,}62$

sowie: Schließen der Def.-Lücke ergibt Nst. $x_3 = 1$

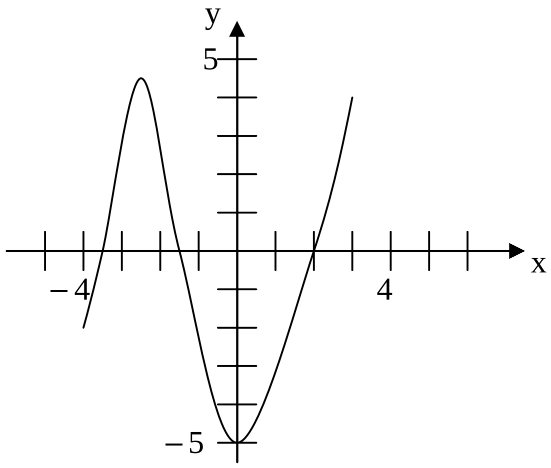
d.) Def.Lücke $x_0 = 1$

f.) Wendepunkte $x_0 = -\frac{8}{6} = -1{,}\overline{3}$

g.) Minimum $x_1 = 0 \qquad f(0) = -5$

Maximum $x_2 = -\frac{8}{3} \qquad f\left(-\frac{8}{3}\right) = 4{,}48$

Skizze:



Zusammenhang zwischen Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Stetigkeit: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ bzw. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$

Differenzierbarkeit: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{x_0}$

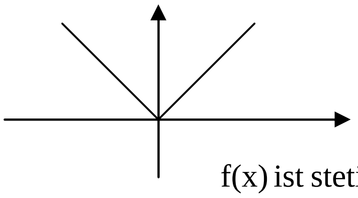
Satz

Jede in x_0 differenzierbare Funktion ist in x_0 stetig

<u>Aber:</u> Aus der Stetigkeit folgt nicht die Differenzierbarkeit

Gegenbsp.:

$$f(x) = |x|$$



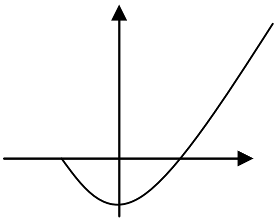
f(x) ist stetig für alle $x \in R$

aber f(x) ist nicht differenzierbar in $x_0 = 0$

5.6. Extremwertaufgaben

Gegeben sei die Funktion $f(x)=x^2-1$
Gesucht : der größte [Maximum] und der kleinste [Minimum] Funktionswert im Intervall [-1,2].

a.) grafische Lösung



kleinster Funktionswert $f(0) = -1$

größter Funktionswert $f(2) = 4 - 1 = 3$

b.) rechnerische Lösung

Wichtig: Wir betrachten ausschließlich differenzierbare Funktionen(⇒Stetigkeit)

Betrachte $f(x) = x^2 - 1$

$$f'(x) = 2x \qquad f'(x) = 0 \quad 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Somit $\quad \text{Minimum } f(x)_{[-1,2]} = \text{Minimum}\{f(-1); f(2), f(0)\}$

$$= \text{Minimum}\{0; 3; -1\} = -1$$

und $\quad \text{Maximum } f(x)_{[-1,2]} = \text{Maximum}\{f(-1); f(2), f(0)\}$

$$= \text{Maximum}\{0; 3; -1\} = 3$$

Lösungsverfahren für Extremwertaufgaben

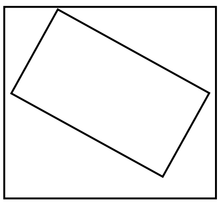
Gegeben ist eine differenzierbare Funktion f(x).
Gesucht ist der größte und kleinste Funktionswert im Intervall [a,b].

1. Zunächst werden unter Verwendung der Ableitungen von f(x) die relativen Minima und die relativen Maxima berechnet und die Funktionswerte an diesen Stellen bestimmt f(a) und f(b).
2. Es werden die Funktionswerte an den Endpunkten des Intervalls berechnet. Der kleinste (größte) Funktionswert ist der kleinste (größte) der in 1. Und 2. Ermittelten Funktionswerte.

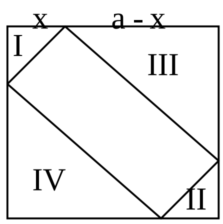
Bsp.: Einem Quadrat mit der Seitenlänge a ist ein Rechteck mit größtem Flächeninhalt einzubeschreiben.

Problem:
Die Aufgabenstellung muß zunächst formalisiert werden, d.h. Aufstellen der Funktion f(x) sowie aller Randbedingungen.

Skizze:



falsch



Berechnen der Fläche A des einbeschriebenen Rechtecks.
Idee: A=Fläche Quadrat - Fläche der Dreiecke I bis IV.

$$\text{Fläche Quadrat}: a^2$$

$$\text{Fläche Dreieck I und II}: \frac{x^2}{2}$$

$$\text{Fläche Dreieck III und IV}: \frac{(a-x)^2}{2}$$

$$\begin{aligned}\text{Somit}: \quad A &= a^2 - x^2 - (a-x)^2 \\ &= a^2 - x^2 - (a^2 - 2ax + x^2) \\ &= a^2 - x^2 - a^2 + 2ax - x^2\end{aligned}$$

$$A(x) = 2ax - 2x^2$$

1. Bestimmung der relativen Minima und Maxima

$$A'(x) = 2a - 4x$$
$$A''(x) = -4$$
$$A'(x) = 0 \quad 2a - 4x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2a}{4} \Leftrightarrow x = \frac{a}{2}$$
$$A''\left(\frac{a}{2}\right) = -4 < 0 \Rightarrow \text{An der Stelle } x = \frac{a}{2} \text{ liegt ein rel. Maximum vor.}$$
$$\text{Berechnen des Funktionswertes } A\left(\frac{a}{2}\right) = 2 \cdot a \cdot \frac{a}{2} - 2 \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2}$$

2. Berechnen der Funktion an den Intervall

$$\text{Intervall:} \quad x \in [0, a]$$
$$A(0) = 2 \cdot a \cdot 0 - 2 \cdot 0^2 = 0$$
$$A(a) = 2 \cdot a^2 - 2 \cdot a^2 = 0$$

$$\text{Lösung: Maximum } f(x)_{[a,a]} = \text{Maximum}\left\{f\left(\frac{a}{2}\right); f(0); f(a)\right\}$$
$$= \text{Maximum}\left\{\frac{a^2}{2}, 0, 0\right\} = \frac{a^2}{2}$$

<u>Bsp.:</u>

(1.)

Gesucht ist das globale Maximum und das globale Minimum der Funktion $f(x) = x^3 + 4x^2$ im Intervall $[-5,2]$.

1. Bestimmung relative Extremwerte

$$f'(x) = 3x^2 + 8x$$
$$f'(x) = 0 \Rightarrow x(3x + 8) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \in [-5,2]$$
$$3 \cdot x_2 + 8 = 0 \Rightarrow x_2 = -\frac{8}{3} \in [-5,2]$$

Funktionswerte:

$$f(0) = 0$$
$$f\left(-\frac{8}{3}\right) = -\frac{512}{27} + \frac{256}{9} = \frac{256}{27} \approx 9{,}48$$

2. Funktionswerte an den Intervallgrenzen

$$f(-5) = -125 + 100 = -25$$
$$f(1) = 1 + 4 = 5$$

Insgesamt:

$$f(0) = 0$$
$$f\left(-\frac{8}{3}\right) = 9{,}48 \leftarrow \text{globale Maximun}$$
$$f(-5) = -25 \leftarrow \text{globale Minimum}$$
$$f(1) = 5$$

(2.)

Gesucht ist das globale Maximum und das globale Minimum der Funktion $f(x) = x^3 + 4x^2$ für $x \in [-5,-4]$

Extremwerte $x_1 = 0 \notin [-5,-4]$ $x_2 = -\frac{8}{3} \notin [-5,-4]$

$\Rightarrow$ Funktionswerte an den Intervallgrenzen

$$f(-5) = -25 \leftarrow \text{globales Minimum}$$
$$f(-4) = -64 + 64 = 0 \leftarrow \text{globales Maximum}$$