3. Funktionen

3.1. Grundlagen

Def.: Eine Funktion oder Abbildung f ist eine Zuordnungsvorschrift, die jedem Element x aus einer Menge **D** (Definitionsbereich) genau ein Element y aus einer Menge **W** (Wertebereich) zuordnet

$$f : D \to W \qquad \text{Abbildung von D in W}$$
$$f : x \mapsto y = f(x) \quad \text{(eindeutig!)}$$

Vereinbarung : falls keine weiteren Angaben gemacht werden ist D=R.

Darstellungsformen

Analytische Darstellung

$y = f(x)$ (explizit) Bsp.: $y = x^2$

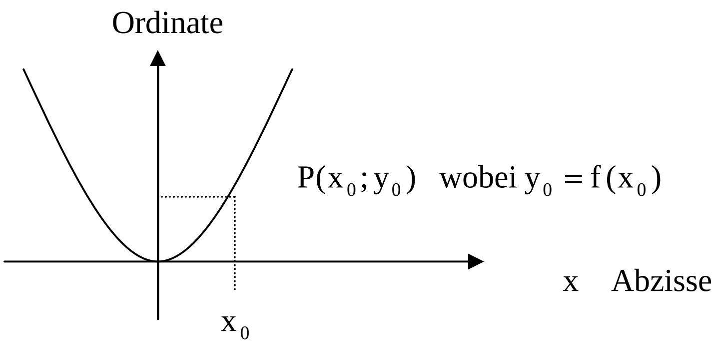
$F(x; y) = 0$ (implizit) Bsp.: $y - x^2 = 0$

Wertetabelle

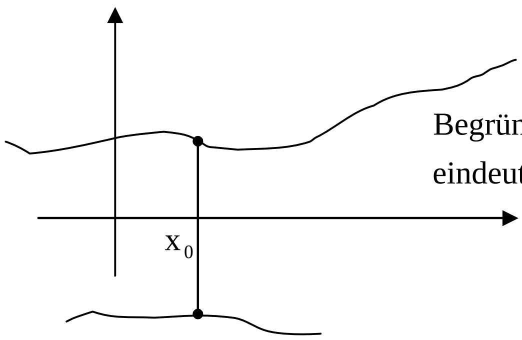
Bsp.:

X	-3	-2	-1	0	1	2	3
Y	9	4	1	0	1	4	9

Graphische Darstellung (Kartesische Koordinaten)



Bsp.: Graph der keine Funktion darstellt



Begründung : zu x_0 existiert kein eindeutiger (d.h. genau ein) y_0

Nullstellen

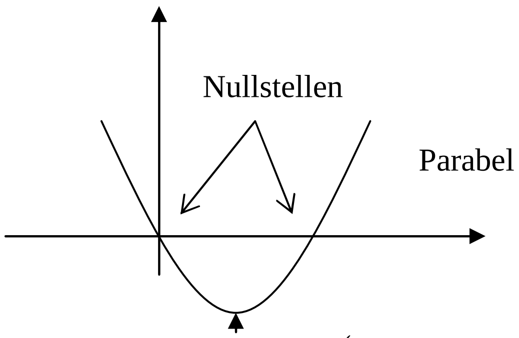
Def.:

Eine Funktion $y = f(x)$ besitzt in x_0 eine Nullstelle falls $f(x_0) = 0$

Bsp.:

$$f(x) = x^2 - 2x$$

$$x_{1,2} = \frac{+2 \pm \sqrt{4}}{2} = 1 \pm 1 \qquad x_1 = 2 \qquad x_2 = 0$$



Minimum $\left(f'(x) = 2x - 2 \qquad f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1\right)$

Beschränktheit

Def.: Eine Funktion f heißt beschränkt in D falls eine Konstante S (Schranke) existiert mit

$$|f(x)| \leq S \quad \text{für } x \in D$$

Bsp.: $f(x) = \sin x$ ist beschänkt $|\sin x| \leq 1$

$f(x) = x^2 - 2x$ ist nicht beschränkt falls $D = R$

aber:

$f(x) = x^2 - 2x$ ist beschränkt falls $D = [a, b]$

Monotonie

Def.: x_1 und x_2 seien bel. Werte aus D mt $x_1 \leq x_2$

DieFunktion f heißt

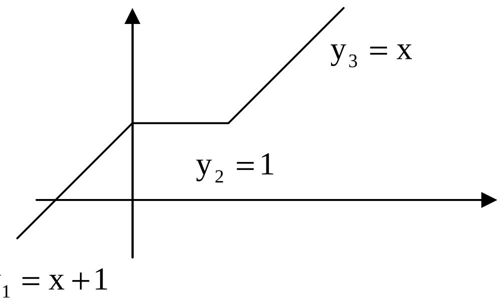
a.) monoton wachsend, falls $f(x_1) \leq f(x_2)$

b.) streng monoton wachsend, falls $f(x_1) < f(x_2)$

c.) monoton fallend, falls $f(x_1) \geq f(x_2)$

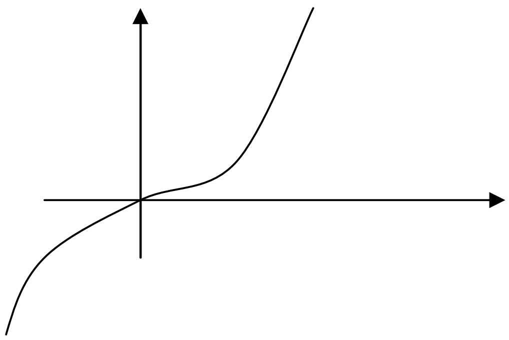
d.) streng monoton fallend, falls $f(x_1) > f(x_2)$

(1) a)



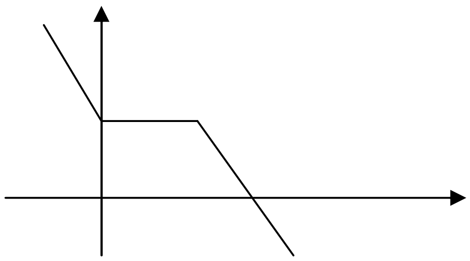
$$y(x) = \begin{cases} x+1 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } 0 \le x \le 1 \\ x & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

b)



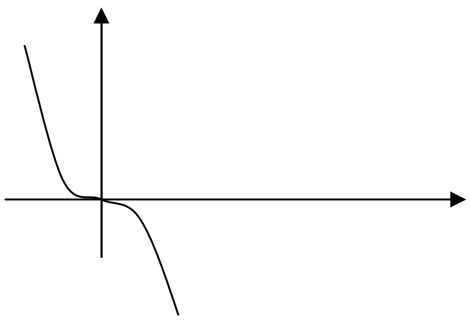
$$y = x^3$$

c)



$$y(x) = \begin{cases} -x+1 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } 0 \le x \le 1 \\ 2 - x & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

d)



$$y = -x^5$$

(2)

Die Parabel $f(x) = x^2$ für $D = R$ erfüllt keine der obigen Monotoniebedingungen

Umkehrfunktion

Def.: Eine Funktion f heißt eineindeutig (bijektiv) oder umkehrbar, falls aus

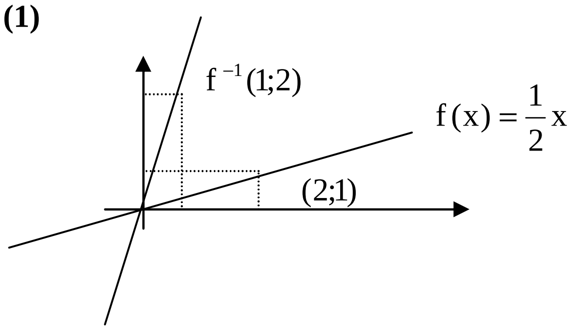
$$x_1 \ne x_2 \Rightarrow f(x_1) \ne f(x_2)$$

(d.h. verschiedene Argumente haben verschiedene Funktionwerte)

Die Umkehrfunktion bijektiver Funktionen ist wie folgt definiert

$$f^{-1} : W_f \to D_f$$
$$y = f(x) \mapsto x$$

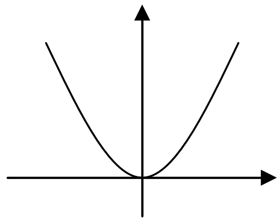
Bsp.: **(1)**



d.h. die Umkehrfunktion von $f(x) = \frac{1}{2}x$ ist die Funktion $f(x) = 2x$ $(f^{-1} : x \mapsto 2x)$

(2)

$f(x) = x^2$ besitzt keine Umkehrfunktion.



aber falls $D = \{x | x \in R \wedge x \geq 0\}$ dann existiert Umkehrfunktion zu $f(x) = x^2$ $(f^{-1} : x \mapsto \sqrt{x})$

Bestimmung der Funktionsgleichung der Umkehrfunktion

a) Rechenverfahren
   1. Auflösen der Funktionsgleichung nach x (falls möglich)
   2. Form des vartauschen von x und y

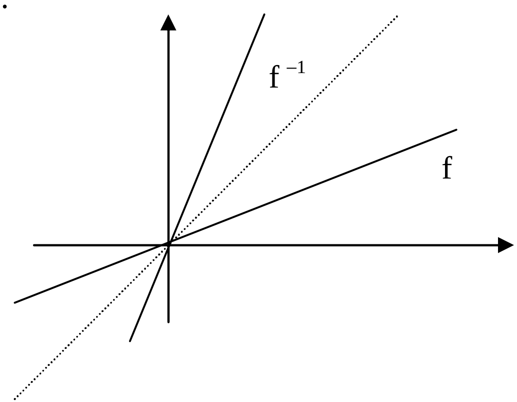
   Bsp.:

   $y = x^3$

   1. $\sqrt[3]{y} = x$

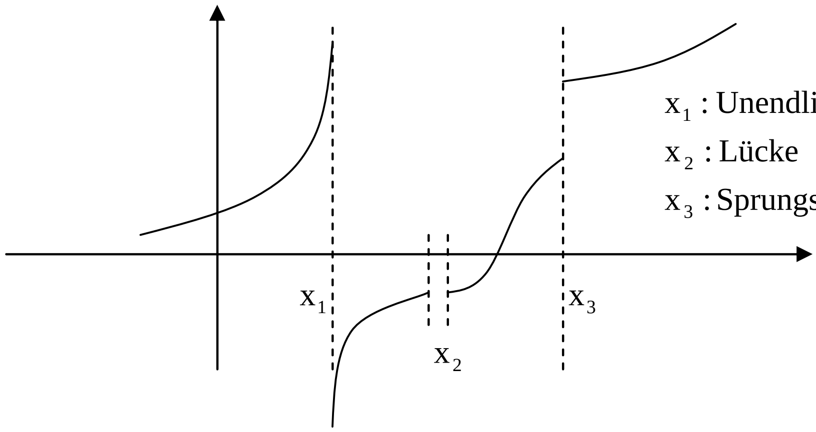
   2. $y = \sqrt[3]{x}$

b) Graphisch
   Die Umkehrfunktion entsteht durch Spiegelung der Funktion an der Geraden y=x
   Bsp.:



<u>Stetigkeit</u>

Anschauliche Begriffsbildung
Eine auf [a,b] definierte Funktion f heißt stetig in [a,b], wenn sie keine Sprungstellen, keine Lücken und keine Unendlichkeitsstellen besitzt.
(d.h. f ist stetig, wenn sie durch einen ununterbrochenen Kurvenzug gezeichnet werden kann)
Anm.: Def. Der Stetigkeit erfolgt später über Grenzwertbetrachtung



x_1 : Unendlichkeitsstelle
x_2 : Lücke
x_3 : Sprungstelle

Stetige Funktionen :
- lineare Fkt. (Geraden)
- sin x, cos x
- Polynome

<u>3.2. Ganzrationale Funktion</u>

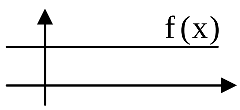
<u>3.2.1. Definition</u>

<u>Def.:</u> Funktionen vom Typ

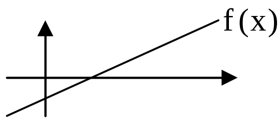
$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0 \qquad x \in \mathbb{R} \text{ und } a_0, a_1, \ldots a_n \in \mathbb{R}$$
$$n \in \mathbb{N}, a_n \neq 0$$

heißt ganzrationale Funktion oder Polynomfunktion.
N bestimmt den Polynomgrad.

$f(x) = a_0$ Polynomgrad 0
$f(x) = 4$ (konstante Funktion)

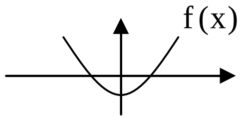


$f(x) = a_1 x^1 + a_0$ Polynomgrad 1
$f(x) = \frac{1}{2} x - 1$ (lineare Funktion)

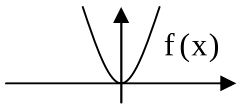


$f(x) = a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$ Polynomgrad 2

$f(x) = x^2 - 1$ (quadratische Funktion)

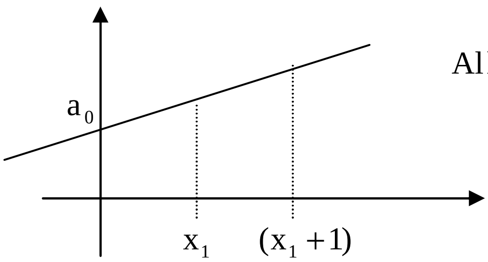


$f(x) = x^8 + 2x^4 + x^2$ Polynomgrad 8



Polynome sind für alle $x \in \mathbf{R}$ stetige Funktionen. Sie sind leicht differenzier- und integrierbar. Sie sind sehr gut geeignet zur Approximation (Näherung) von Funktionen (Bsp.: falls eine Funktion durch eine Meßreihe definiert ist).

3.2.2. Lineare Funktion (Gerade)



Allgemeine Geradengleichung

$$y(x) = a_0 + a_1 x$$

$y(0) = a_0$ d.h. a_0 ist Schnittpunkt mit der y - Achse

$$y(x_1 + 1) = a_0 + a_1(x_1 + 1)$$

$$y(x_1 + 1) - y(x_1) = a_0 + a_1(x_1 + 1) - (a_0 + a_1 x_1)$$

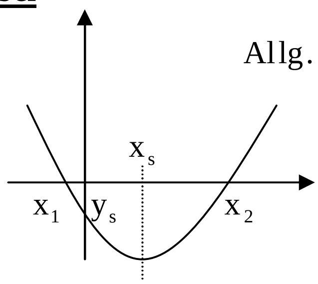
$$= a_0 + a_1 x_1 + a_1 - a_0 - a_1 x_1 = a_1$$

a_1 ist Steigung der Geraden (d.h. "1" nach rechts "a_1" nach oben)

Bestimmung einer Geradengleichung

Ist eine Gerade durch P_1 und P_2 bzw. durch P_1 und die Steigung a_1 gegeben, so elforlgt die Bestimmung der Geradengleichung durch Einsetzen der Daten und Lösen des entstehenden Gleichungssystems für die Unbekannten

3.2.3. Parabel



Allg. Parabelgleichung $\quad y(x) = ax^2 + bx + c$

Nullstellen

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{bzw. p/q - Formel}$$

Linearfaktorzerlegung

$$y = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

Scheitelpunkt $S(x_s; y_s)$

"Steigung" im Scheitelpunkt ist 0

Betrachte Ableitung $y'(x) = 2ax + b$

im Scheitelpunkt $y'(x_s) = 0 \quad$ d.h. $2ax_s + b = 0 \Leftrightarrow x_s = \frac{-b}{2a}$

Bsp.: $\quad y(x) = 3x^2 + 3x - 6$

Nst.: $x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 72}}{6} = \frac{-3 \pm 9}{6}$

$x_1 = 1 \qquad x_2 = -2$

Linearfaktorzerlegung

$$y(x) = 3x^2 + 3x - 6 = 3 \cdot (x - 1) \cdot (x + 2)$$

Scheitel $\quad x_s = \frac{-3}{2 \cdot 3} = -\frac{1}{2} \qquad y_s = 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 6$

$$= \frac{3}{4} - \frac{3}{2} - \frac{24}{4}$$

$$= -\frac{27}{4}$$

3.2.4. Polynomfunktion höheren Grades (n>2)

Nullstellen

Sei f(x) Polynom vom Grad n und es gelte $f(x_1) = 0$ (d.h. x_1 ist Nullstelle)

Dann gilt $f(x) = (x - x_1)\ \underbrace{f_1(x)}_{\text{Grad (n-1)}}$ $\quad$ (Abspaltung eines Linearfaktors)

Bsp.:

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + x - 4 \qquad f(1) = 0$$

$$\Rightarrow f(x) = (x - x_1) \cdot f_1(x)$$

Bestimmung von $f_1(x)$: $\quad f_1(x) = f(x) : (x - 1)$

Polynomdivision :

$$(x^3 + 2x^2 + x - 4) : (x - 1) = x^2 + 3x + 4$$

$$\underline{-x^3 - x^2}$$

$$3x^2 + x - 4$$

$$\underline{-3x^2 - 3x}$$

$$4x - 4$$

$$\underline{4x - 4}$$

$$0$$

Somit $f(x) = (x - 1) \cdot (x^2 + 3x + 4)$

<u>Hauptsatz der Algebra</u>

Ein Polynom vom Grad n hat höchstens n reelle Nullstellen und es hat genau n Nullstellen, wenn man die komplexen Nullstellen mitzählt und jede Nullstelle entsprechend ihrer Vielfachheit berücksichtigt. Mit diesen Nullstellen gilt die Linearfaktorzerlegung

$$f(x) = a_n \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \ldots (x - x_n)$$

<u>Horner-Schema</u>

x_0 sei fest

Polynomdivision

$$(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0) : (x - x_0) = a_3x^2 + (a_3x_0 + a_2) \cdot x + (a_3x_0^2 + a_2x_0 + a_1) + f(x_0)$$

$$\underline{-(a_3x^3 - a_3x_0x^2)}$$

$$(a_3x_0 + a_2)x^2 + a_1x$$

$$\underline{-(a_3x_0 + a_2)x^2 + (a_3x_0^2 + a_2x_0) \cdot x}$$

$$(a_3x_0^2 + a_2x_0 + a_1) \cdot x + a_0$$

$$\underline{-(a_3x_0^2 + a_2x_0 + a_1) \cdot x + (a_3x_0^2 + a_2x_0 + a_1) \cdot x_0}$$

$$\underbrace{a_3x_0^3 + a_2x_0^2 + a_1x_0 + a_0}_{=f(x_0)}$$

d.h. $$\frac{f(x)}{x - x_0} = \underbrace{a_3x^2 + (a_3x_0 + a_2) \cdot x + (a_3x_0^2 + a_2x_0 + a_1)}_{f_1(x)} + \frac{f(x_0)}{x - x_0}$$

Bsp.: Polynom vom Grad 3

falls x_0 Nullstelle ist $f(x_0)$ und $f(x) = (x - x_0) \cdot f_1(x)$
wobei $(x - x_0)$ ein abgespaltener Linearfaktor ist.

	a_3	a_2	a_1	a_0
+		a_3x_0	$a_3x_0^2 + a_2x_0$	$a_3x_0^3 + a_2x_0^2 + a_1x_0$
x_0	$\underbrace{a_3}$	$\underbrace{a_3x_0 + a_2}$	$\underbrace{a_3x_0^2 + a_2x_0 + a_1}$	$\underbrace{a_3x_0^3 + a_2x_0^2 + a_1x_0 + a_0}_{f(x_0)}$

Koeffizienten des reduzierten Polynoms
(falls $f(x_0) = 0$)

Das Horner Schema liefert

– den Funktionswert an einer Stelle x_0

– und falls $f(x_0) = 0$, die Koeffizienten des reduzierten Polynoms

Das für den Fall n=3 dargestellte Verfahren (Horner-Schema) gilt für Polynome von beliebigem Grad n.

Bsp.:

$$f(x) = 2x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 6x + 5$$
$$f(1) = 2 + 2 - 3 - 6 + 5 = 0$$
$$\Rightarrow f(x) = (x-1) \cdot f_1(x) \quad \text{mit } f_1(x) = b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$$
Gesucht : b_3, b_2, b_1 und b_0

<u>Horner-Schema</u>

Koeff.v.f(x)	2	2	-3	-6	5
+		$2 \cdot 1$	$4 \cdot 1$	1	-5
1	2	4	1	-5	0
	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$
	b_3	b_2	b_1	b_0	f(1)

d.h. $f(x) = (x - 1) \cdot (2x^3 + 4x^2 + x - 5)$

3.3. Gebrochenrationale Funktionen

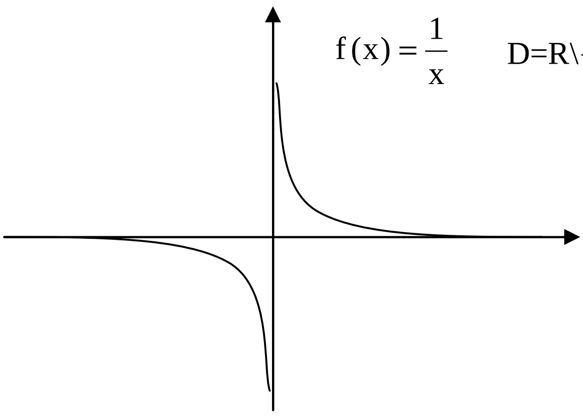
3.3.1. Definition

Def.: Funktionen, die als Quotient zweier Polynomfunktionen g(x) und h(x) darstellbar sind heißen gebrochenrationale Funktionen

$$y(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}$$

falls: m>n echt gebrochenrational
n<m unecht gebrochenrational

Bsp.:



$f(x) = \frac{1}{x}$ D=R\{0}

g(x)=1 Grad g(x)=0
h(x)=x Grad h(x)=1

$1 > 0$ d.h. $f(x) = \frac{1}{x}$ ist echt gebrochenrational

3.3.2. Nullstellen, Definitionslücken, Pole

Nullstellen der Funktion $y(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ ist an der Stelle $g(x_0) = 0$ und $h(x_0) \neq 0$

Bsp.:

$$y(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2} = \frac{(x-1)\cdot(x+1)}{(x+1)\cdot(x+2)}$$

Nullstellen:

$y(x) = 0$ für $x = 1$

$g(-1) = 0$ aber $h(-1) = 0$

y(x) ist nicht definiert für x∈{-1;-2}
-1 und -2 sind Definitionslücken der Funktion y(x) (Nullstellen des Nennerpolynoms).

<u>Allg.:</u> Nullstellen des Nennerpolynoms sind Definitionslücken.

<u>Def.:</u> Stellen in deren „unmittelbarer" Nähe die Funktionswerte über alle Grenzen wachsen oder fallen heißen <u>Pole</u> oder <u>Unendlichkeitsstellen.</u>

d.h. Dies sind Stellen in denen $h(x_0) = 0$ und $g(x_0) \neq 0$
wobei h(x) und g(x) keine gemeinsame Linearfaktoren besitzen.

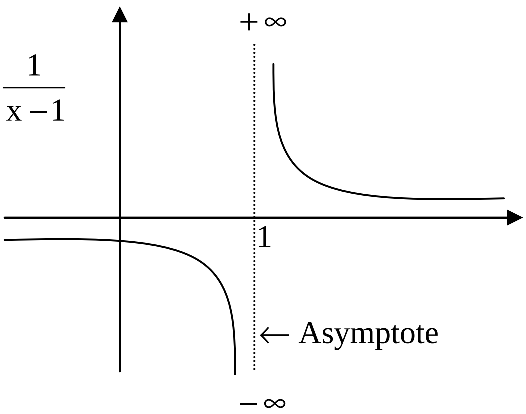
Wichtig $y(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ ist in x_0 nicht definiert.

Die Funktion schmiegt sich in der Umgebung dieser Stellen an einer Geraden parallel zur y-Achse an. Die Gerade heißt Asymptote.

Bsp.:

(1.)

$$f(x) = \frac{1}{x-1}$$

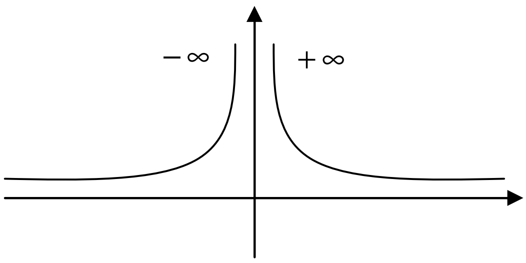


Polstelle für $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

f(x) schmiegt sich an die parallele Gerade zur y-Achse (vertikale Asymptote) an.

(2.)

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \qquad \text{Polstelle für } x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$



y-Achse ist Asymptote

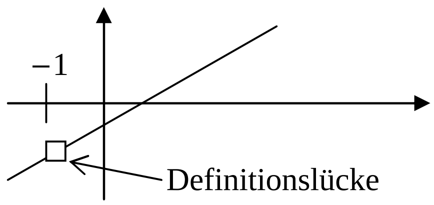
(3.) <u>Sonderfall :</u> Zähler- und Nennerpolynom besitzen gemeinsame Nullstelle

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{x^2 - 1}{x+1} = \frac{(x+1)\cdot(x-1)}{(x+1)}$$

Zunächst definiert für x = -1 , denn h(-1) = 0

g(-1) = 0 da aber h(-1) = 0 kann man nicht auf Nullstelle schließen.

Lösung :



Sein volles Beheben der Definitionslücke, so daß man durchzeichnen kann (stetig beheben).

Setze:

$$f_{neu}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x \neq -1 \\ -2 & \text{für } x = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f_{neu}(x) = x - 1$$
$f_{neu}(x)$ ist stetig

d.h. Durch Kürzen des Linearfaktors der gemeinsamen Nullstelle von Nenner- und Zählerpolynomen kann die Definitionslücke sinnvoll (stetig) behoben werden.

Zusammenfassung

Bestimmung von Null- und Polstellen gebrochenrationaler Funktionen
1. Zähler- und Nennerpolynom in Linearfaktoren zerlegen (z.B. Horner-Schema) und kürzen gemeinsamer Faktoren.
2. Linearfaktoren im Zähler liefern Nullstellen
   Linearfaktoren im Nenner liefern Polstellen
   (Zeichnen in der Nähe der Polstelle mit vertikaler Asymptote)

Verhalten echt gebrochenerationaler Funktionen für $x \to \pm\infty$

Bsp.:

$f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$ Grad des Zählerpolynoms: 1

Grad des Nennerpolynoms: 2

d.h. f(x) ist echt gebrochen

Nullstelle: $x_1 = 0$

Polstellen: $x_2 = 1;\ x_3 = -1$

Frage: Welchem Wert nähert sich der Funktionswert f(x),

falls $x \to +\infty$ (bzw. $x \to -\infty$) strebt

1.)

$$x \to +\infty \qquad f(x) = \frac{x}{x \cdot x - x \cdot \frac{1}{x}} \qquad x > 0$$

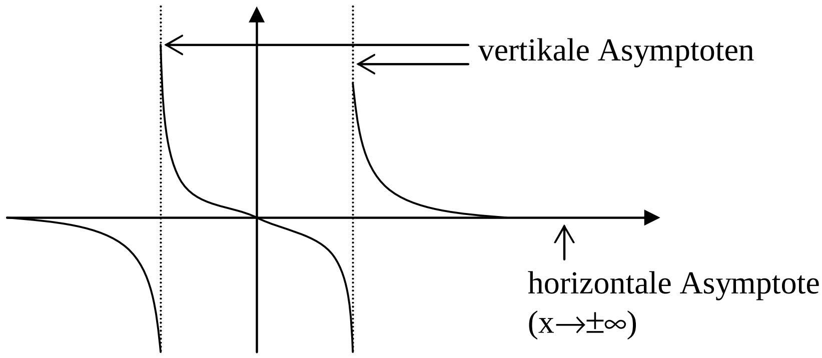
$$= \frac{1}{\underbrace{x}_{\to+\infty} - \frac{1}{\underbrace{x}_{\to 0}}}$$

d.h. $f(x) \to +0 \quad (x \to +\infty)$

2.)

$$x \to -\infty \qquad f(x) = \frac{1}{\underbrace{x}_{\to-\infty} - \frac{1}{\underbrace{x}_{\to 0}}} \qquad x < 0$$

d.h. $f(x) \to -0$



Nullstelle: $x_1 = 0$

Polstelle: $x_2 = 1$; $x_3 = -1$

<u>Verhalten unecht gebrochenrationaler Funktionen für x→±∞</u>

Bsp.:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 0{,}5} \qquad \left.\begin{array}{l}\text{Grad des Zählerpolynoms } g(x) = 2 \\ \text{Grad des Nennerpolynoms } h(x) = 1\end{array}\right\} 2 > 1 \Rightarrow \text{unecht gebrochen}$$

Nullstelle: $x_1 = 1$; $x_2 = -1$

Polstelle: $x_3 = -0{,}5$