1. Grundlagen

1.1. Mengen

Unter einer **Menge** verstehen wir die Zusammenfassung gewisser, wohlunterschiedener Objekte (Elemente) zu einer Einheit.

Darstellungsformen

- Aufzählung $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ endliche Menge

  $M = \{b_1, b_2, b_3, \ldots\}$ unendliche Menge

Bsp.: Menge der natürlichen Zahlen

$N = \{1,2,3,\ldots\}$

$M_1 = \{2,6,1,4\}$

Anm.: Die Reihenfolge ist unwesentlich

- beschreibende Darstellung

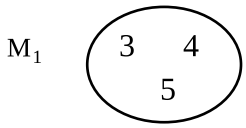
$M_1 = \{x \mid x \text{ besitzt die Eigenschaft } E_1, E_2, \ldots E_n\}$

Bsp.:

$M_1 = \{x \mid x \in N \text{ mit } 2 < x < 6\}$

$M_2 = \{x \mid x \text{ ist eine reelle Zahl mit } x^2 > 4\}$

VENN - Diagramm



$\{\ \}$ leere Menge ; ist eine Menge die kein Element enthält

Bsp.: $\{x \mid x \text{ ist reelle Zahl und } x^2 + 1 = 0\} = \{\ \}$

Anm.: Wir verwenden folgende Kürzel

$\wedge$ für "und"

$\vee$ für "oder"

$A \Rightarrow B$ aus A folgt B

$A \Leftrightarrow B$ A ist äquivalent zu B ; A genau dann wenn B

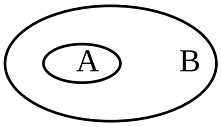
- Mengengleichheit

A = B wenn die Mengen A und B dieselben Elemente enthalten

Bsp.: $\{x \mid x \in N \wedge 2 < x < 6\} = \{3,4,5\}$

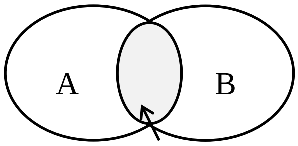
- Teilmenge

$A \subset B$ (A ist Teilmenge von B) wenn $a \in A \Rightarrow a \in B$



Bsp.: $\{2,4,6\} \subset \{1,2,3,\ldots,10\}$

- Schnittmenge

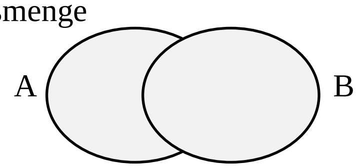


$A \cap B$ (Lese: A geschnitten B)

$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

Bsp.: $A = \{x \mid x \in N \wedge x < 5\}$ $B = \{3,4,5,6\}$ $A \cap B = \{3,4\}$

- Vereinigungsmenge

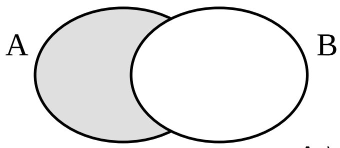


$A \cup B$ (Lese: A vereinigt B)

$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

Bsp.: $A = \{x \mid x \in N \wedge x < 5\}$ $B = \{3,4,5,6\}$ $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\}$

-Differenzmenge

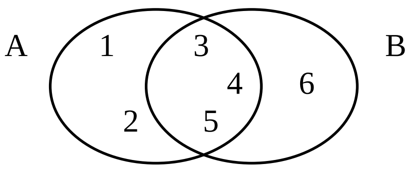


$A \setminus B$ (Lese: A ohne B)

$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

Bsp.: $A = \{x \mid x \in N \wedge x < 5\}$ $B = \{3,4,5,6\}$ $A \setminus B = \{1,2\}$

Venn-Diagramm



1.2. Zahlensysteme

1.2.1. Natürliche, rationale und reelle Zahlen

$N = \{1,2,3,\ldots\}$ natürliche Zahlen

Sei $n \in N \wedge m \in N \quad \Rightarrow \quad n + m \in N$ (Addition)

Aber: $5 \in N \wedge 8 \in N \quad \Rightarrow \quad 5 - 8 \notin N$ (Subtraktion)

$N_0 := \{0,1,2,3,\ldots\} = N \cup \{0\}$

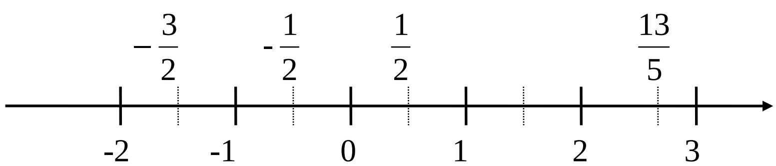
$Z \quad = \{0,\pm1,\pm2,\ldots\}$ ganze Zahlen

Sei $n, m \in Z \quad \Rightarrow \quad n + m \in Z$ und $n - m \in Z$

Zur Lösung der Gleichung $5 \cdot x = 4$ braucht man rationale Zahlen (Brüche)

$$Q := \left\{ x \mid x = \frac{z}{n} \quad z \in Z, n \in N \right\} \qquad \text{(Q für Quotienten)}$$

Die Rechenoperationen “Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division“ - außer Division durch Null - führen nicht aus Q heraus.
Die Menge Q mit diesen Operationen (Addition / Subtraktion und Multiplikation / Division) und den entsprechenden Gesetzen (Bsp.: a+b = b+a ; (a+b)+c = a+(b+c)) wird als Körper der rationalen Zahlen bezeichnet.
Darstellung auf der Zahlengeraden



Natürliche Ordnungsbeziehung a<b wenn a “links“ von b liegt.

Irrationale Zahlen

Gesucht ist die Lösung der Gleichung $x^2 = 2$

Lösung $x = \sqrt{2} \notin Q$ x ist eine irrationale Zahl

Beweis :

Sei $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ $\quad a, b \in N$ so gewählt, daß gg. $T(a, b) = 1$

$\Rightarrow \sqrt{2} = \frac{a}{b} \Rightarrow 2 = \frac{a^2}{b^2} \Leftrightarrow 2 \cdot b^2 = a^2 \qquad (*)$

$\Leftrightarrow b^2 = \frac{a^2}{2} \in N$, d.h. 2 teilt a^2

$\Rightarrow 2$ teilt a für $a = 2 \cdot c \Rightarrow a^2 = 4 \cdot c^2$

Einsetzen in (*) $\quad 2b^2 = 4c^2 \quad / : 2 \Rightarrow b^2 = 2c^2$

$$\Leftrightarrow \frac{b^2}{2} = c^2 \in N \quad \Rightarrow \quad 2 \text{ teilt } b^2 \quad \Rightarrow \quad 2 \text{ teilt } b$$

Somit 2 teilt a und 2 teilt b. Widerspruch zu gg. T(a,b)=1

d.h. $a, b \in N$ nicht wählbar, sodaß $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$

Rationale und irrationale Zahlen bilden zusammen die Menge **R** der reellen Zahlen.

- Berechnungen in **R** mit dem Taschenrechner (Computer)
Unendliche Dezimalbrüche werden nur näherungsweise dargestellt, d.h. die Rechengesetze gelten nicht exakt.

Bsp.: $\left(\frac{1}{3}\right)^{13} \cdot 3^{17} =$

Rechengesetze in R (üben!)

Bruchrechnung :

Addition:	$\frac{z_1}{n_1} + \frac{z_2}{n_2} = \frac{z_1 n_2 + z_2 n_1}{n_1 \cdot n_2}$	(Hauptnenner)
Multiplikation	$\frac{z_1}{n_1} \cdot \frac{z_2}{n_2} = \frac{z_1 z_2}{n_1 n_2}$	
Division	$\frac{z_1 / n_1}{z_2 / n_2} = \frac{z_1 n_2}{z_2 n_1}$	(Kehrwert)

Potenzgesetze :

$$a^n := \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots a}_{\text{n Faktoren}}$$

Sei $a, b \in R \quad n, m \in N$

I. $a^m \cdot a^n = \underbrace{a \ldots a}_{m} \cdot \underbrace{a \ldots a}_{n} = a^{m+n}$

II. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad a^{-n} := \frac{1}{a^n}$

III. $a^n \cdot b^n = \underbrace{a \cdot a \ldots \cdot a}_{n} \cdot \underbrace{b \cdot b \ldots \cdot b}_{n} = (a \cdot b)^n$

IV. $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

V. $(a^n)^m = \underbrace{a^n \cdot a^n \ldots \cdot a^n}_{m} = a^{n \cdot m}$

Für nichtganzzahliges p ist a^p i.a. nur bei a>0 definiert. Unter dieser Einschränkung gelten die Gesetze für $n, m \in R$, wobei $a^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a}$.

1.2.2 Komplexe Zahlen

Bsp.: $x^2+1=0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2=-1$
keine reelle Lsg.

Formale Lsg. : falls $x^2=9 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2}=\pm\sqrt{9}$

hier : $x^2=-1 \quad \Rightarrow$ Lsg.: $x_{1,2}=\pm\underbrace{\sqrt{-1}}_{:=j}$ nur formal

Def.: Die imaginäre Einheit j ist definiert durch $j^2 = -1$
d. h. j ist eine neu eingeführte Zahl.

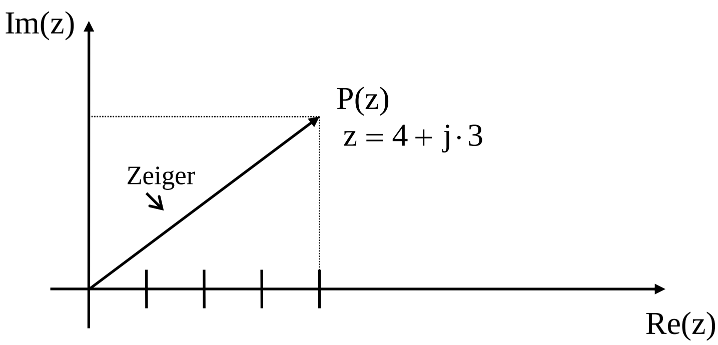
Def.: Eine komplexe Zahl $z = x + j\cdot y$ ist Summe aus reeller Zahl x und imaginärer Zahl $j\cdot y$ wobei y eine reelle Zahl ist.
x heißt Realteil (Re)
y heißt Imaginärteil (Im)

Bsp.:

$z = 4 + j\cdot 3$

$z = \sqrt{3} + j\cdot 0{,}718$

Darstellung in Zahlenebene



Die Menge der komplexen Zahlen kann im kartesischen Koordinatensystem dargestellt werden.

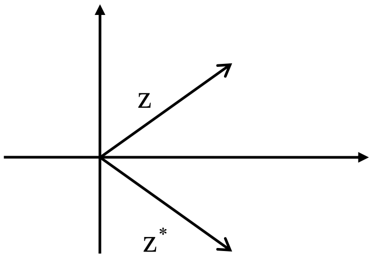
Weitere Grundbegriffe

- Gleichheit :

Sei $z_1 = x_1 + j\cdot y_1 \qquad z_2 = x_2 + j\cdot y_2$

$z_1 = z_2 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2$ und $y_1 = y_2$

- Die komplexe Zahl $z^* = x - j\cdot y$ heißt die zu $z = x + j\cdot y$ konjugiert komplexe Zahl

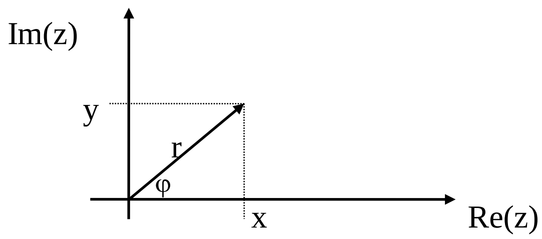


Klar $\left(z^*\right)^* = z$

- Der Betrag $|z|$ ist die Länge des dazugehörenden Zeigers

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \in R \quad \text{(Pythagoras)}$$

Darstellungsformen



1. Algebraische oder kartesische Darstellung

$$z = x + j \cdot y \qquad \text{Bsp.: } z = \sqrt{2} + j\sqrt{2}$$

2. Trigonometrische Form (polare Form)

$$z = r \cdot \cos\varphi + j\, r \cdot \sin\varphi \ = r(\cos\varphi + j \sin\varphi)$$

Bsp.: $z = 2(\cos 45° + j \sin 45°)$

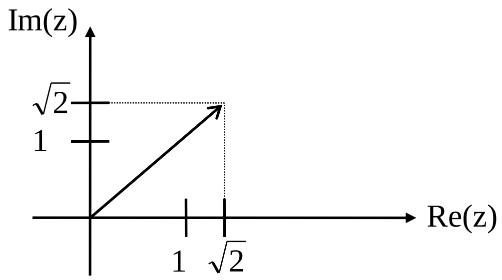
$$= 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2} + j\sqrt{2}$$

3. Exponentialform

$z = r \cdot e^{j\varphi}$ gilt nach der Euler Formel :

$$e^{j\varphi} = \cos\varphi + j \sin\varphi$$

Bsp.: $z = 2e^{j45°} = 2e^{j\frac{\pi}{4}}$



Umrechnung zwischen den Darstellungsformen

- Polarform $\rightarrow$ kartesische Form

Sei $z = (\cos\varphi + j\sin\varphi)$ $\left(\text{bzw.: } z = r \cdot e^{j\varphi}\right)$ dann ergibt sich die kart. Form wie folgt :

$$x = r \cdot \cos\varphi \qquad y = r \cdot \sin\varphi \quad \text{und} \quad z = x + jy$$

(d.h. Cosinus und Sinus des Winkels φ werden ausgerechnet)

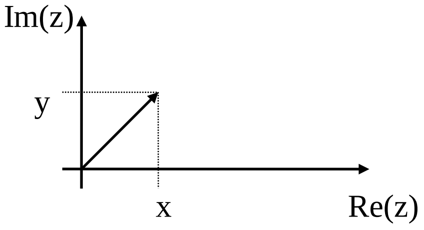
Bsp.:

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + j\ \sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow\ x = 2\cdot\cos\frac{\pi}{4} = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \qquad y = 2\cdot\sin\frac{\pi}{4} = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow\ z = \sqrt{2} + j\ \sqrt{2}$$

- Kartesische Form $\rightarrow$ Polarform



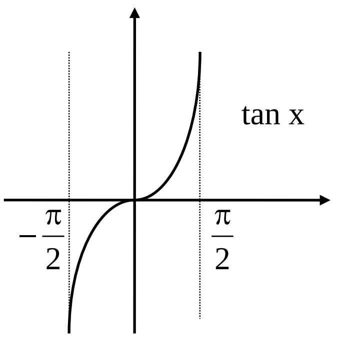
Sei $z = x + j\,y$

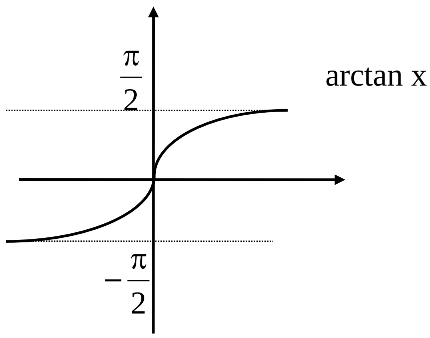
gesucht: r, φ

$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ (Pythagoras)

$$\tan\varphi = \frac{y}{x} \qquad \Rightarrow \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{wobei } \varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$$

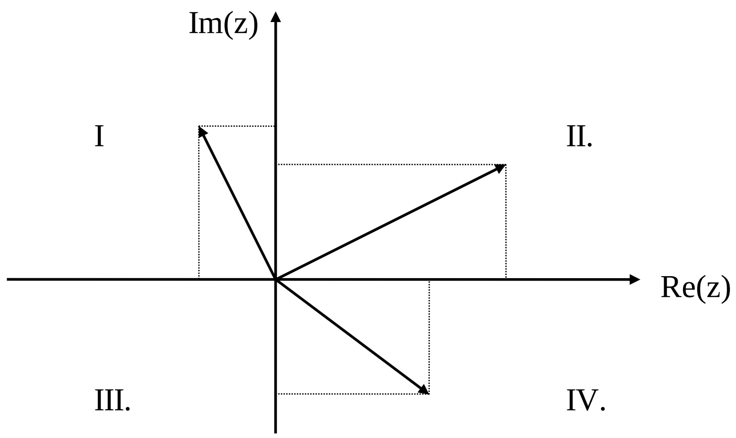
<u>Skizze</u>





Taschenrechner Fkt. arctan liefert Werte zwischen $-\frac{\pi}{2}$ $(-90°)$ und $+\frac{\pi}{2}$ $(+90°)$

<u>Fallunterscheidung zur Winkelbestimmung</u>



I. und IV. Quadrant $\rightarrow$ o.k.!

II. Quadrant : arctan liefert Wert $\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right]$ da $\frac{-x}{y}=\frac{x}{-y}$ für $x,y>0$

$$\Rightarrow\ \varphi=\arctan\left(\frac{y}{x}\right)+\pi$$

III. Quadrant : arctan liefert Wert $\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$

$$\Rightarrow\ \varphi=\arctan\left(\frac{y}{x}\right)+\pi$$

<u>Grundrechenarten für komplexe Zahlen</u>

Wir bezeichnen die Menge der komplexen Zahlen mit der Operation + (bzw. -) und · (bzw. **:**) als den Körper **C** der komplexen Zahlen.
Die Def. der Operationen muß so erfolgen, daß **C** eine erweiterung von **R** darstellt.
(**R** ist Sonderfall in **C**)

<u>Addition / Subtraktion</u>
Sei $z_1,z_2\in C$ mit $z_1=x_1+j\,y_1$ $\quad z_2=x_2+j\,y_2$

$$\boxed{\begin{aligned}z_1+z_2&=(x_1+x_2)+j\,(y_1+y_2)\\ z_1-z_2&=(x_1-x_2)+j\,(y_1-y_2)\end{aligned}}$$

d.h. Real- und Imaginärteil werden jeweils für sich addiert (subtrahiert)
($\hat{=}$ Addition (subtr.) von Vektoren)

<u>Multiplikation</u>
Sei z_1,z_2 wie oben

$$\begin{aligned}z_1\cdot z_2&=(x_1+j\,y_1)\cdot(x_2+j\,y_2)\\ &=x_1\cdot x_2+j\,x_1\cdot y_2+j\,y_1\cdot x_2+\underbrace{j^2}_{=-1}\,y_1\cdot y_2\end{aligned}$$

$$\boxed{z_1\cdot z_2=x_1\cdot x_2-y_1\cdot y_2+j\,(x_1y_2+y_1x_2)}$$

<u>Division</u>
Sei z_1,z_2 wie oben

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2}&=\frac{x_1+j\,y_1}{x_2+j\,y_2}=\frac{(x_1+j\,y_1)\cdot(x_2-j\,y_2)}{(x_2+j\,y_2)\cdot(x_2-j\,y_2)}\\ &=\frac{x_1x_2-j\,x_1y_2+j\,y_1x_2+y_1y_2}{x_2{}^2+y_2{}^2}\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2{}^2+y_2{}^2}+j\,\frac{y_1x_2-x_1y_2}{x_2{}^2+y_2{}^2}}$$

Multiplikation und Division in trigonometrischer Darstellung

Sei $z_1 = r_1 \cdot (\cos\varphi_1 + j\ \sin\varphi_1) \qquad z_2 = r_2 \cdot (\cos\varphi_2 + j\ \sin\varphi_2)$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 (\cos\varphi_1 + j\ \sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + j\ \sin\varphi_2)$$
$$= r_1 \cdot r_2 (\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 + j\ \cos\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 + j\ \sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2)$$
$$= r_1 \cdot r_2 (\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 + j\ (\sin\varphi_2 \cdot \cos\varphi_1 + \sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2)) \quad (*)$$

Unter Verwendung der Additionstheoreme

$$\cos(\varphi_1 + \varphi_2) = \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2$$
$$\sin(\varphi_1 + \varphi_2) = \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 + \cos\varphi_1 \sin\varphi_2$$

erhalten wir aus $(*)$:

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + j\ \sin(\varphi_1 + \varphi_2))}$$

In Worten:
Zwei komplexe Zahlen werden multipliziert, indem man ihre Beträge multipliziert und ihre Argumente (Winkel) addiert.

1.3 Gleichungen, Ungleichungen, Betrag

1.3.1 Gleichungen

1.3.1.1 Lineare Gleichungen

Lineare Gleichung vom allg. Typ

$$ax + b = 0 \qquad / \text{-b} \qquad (a \neq 0)$$
$$ax = -b \qquad / \ :a$$
$$x = -\frac{b}{a}$$

Bsp.:

$$4x + 7 = 0 \qquad / \text{-7}$$
$$4x = 7 \qquad / \ :4$$
$$x = -\frac{7}{4}$$

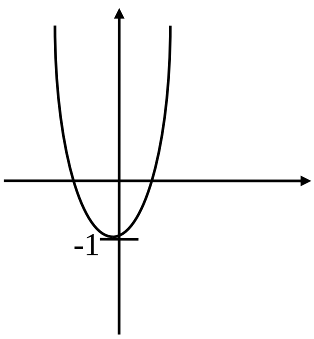
1.3.1.2 Quadratische Gleichung

Allg. Form $\quad ax^2 + bx + c = 0$

Gesucht sind Werte für x, so daß Gleichung erfüllt

Bsp.: $\quad 2x^2 + 1x - 1 = 0 \qquad (*)$

Skizze :



$f(x) = 2x^2 + 1x - 1$

x	f(x)
-1	0
0	-1
1	2

$\Rightarrow \exists$ 2 Nullstellen von f(x), d.h. 2 Lösungen von (*)

Gesucht ist die Formel zur Berechnung der Lösung :
Idee : Quadrat im Spezielfall durch $\sqrt{\ }$ - ziehen lösbar

Bsp.1 $x^2 = 9 \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{9} = \pm 3$

Bsp.2 $(x+1)^2 = 9 \Rightarrow x_{1,2} + 1 = \pm\sqrt{9}$

$\Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{9} - 1 = \pm 3 - 1 \qquad x_1 = 2$

$x_2 = -2$

d.h. Ziel $2x^2 + 1x - 1 = 0$ soll auf Funktion $(x + \otimes)^2 = \otimes$ zurückgeführt werden.

$2x^2 + 1x - 1 = 0 \qquad /:2 \qquad$ dann $x^2 + \ldots = 0$

$$x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0 \qquad / + \frac{1}{2}$$

$$x^2 + \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}$$

Gesucht : $(x + \otimes)^2$

$$(x+\otimes)^2 = \underbrace{x^2}_{x^2} + \underbrace{2\cdot\otimes\cdot x}_{\frac{1}{2}x} + \underbrace{\otimes^2}_{\text{wird korrigiert}}$$

wir haben $2\cdot\otimes = \frac{1}{2} \Rightarrow \otimes = \frac{1}{4}$

Somit $\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}$

Quadratische Ergänzung

$$\underbrace{x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}} - \frac{1}{16} = \frac{1}{2}$$

$$\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} = \frac{1}{2} \qquad / + \frac{1}{16}$$

$$\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{9}{16} \qquad / \sqrt{\ }$$

$$x + \frac{1}{4} = \pm\sqrt{\frac{9}{16}}$$

$$= \pm\frac{3}{4} - \frac{1}{4} \qquad x_1 = -1 \quad x_2 = +\frac{1}{2}$$

Bsp.: Quadratische Ergänzung $(x-3)(x+2) = x^2 - x - 6 = 0$

$$x^2 - x - 6 = 0 \qquad /+6$$
$$x^2 - x = +6$$
$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 6 \qquad /+\frac{1}{4}$$
$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$$
$$\left(x-\frac{1}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{25}{4}}$$
$$x = \pm\frac{5}{2} + \frac{1}{2} \qquad x_1 = 3 \quad x_2 = -2$$
$$\text{d.h.} \quad x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$$

Allgemein

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad /:a \quad (a \neq 0)$$
$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \qquad \text{Setze } \frac{b}{a} = p \wedge \frac{c}{a} = q$$

$\boxed{x^2 + px + q = 0}$ Normalform

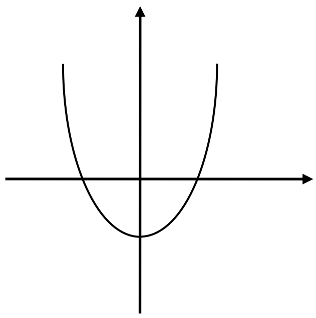
$$x^2 + px + q = 0 \qquad /+\frac{p^2}{4} \qquad \text{Verwende } \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$$
$$\Leftrightarrow \quad x^2 + px + \frac{p^2}{4} + q = \frac{p^2}{4} \qquad /-q$$
$$\Leftrightarrow \quad x^2 + px + \frac{p^2}{4} = \frac{p^2}{4} - q$$
$$\Leftrightarrow \quad \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q \qquad /\sqrt{\ }$$
$$\Leftrightarrow \quad x_{1,2} + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \qquad /-\frac{p}{2}$$

$$\boxed{x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}}$$

Die allgemeine Lösung der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$ ist gegeben durch

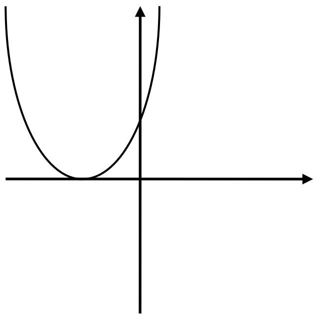
$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Grafische Darstellung : (Parabel)



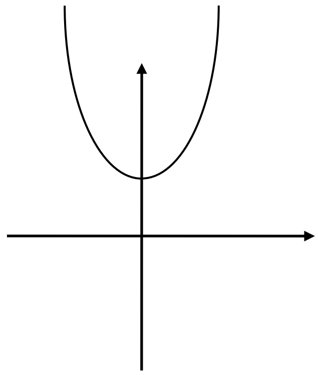
zwei verschiedene
Lsg. in **R**

falls $\frac{p^2}{4} - q > 0$



eine (doppelte) Lsg.
in **R**

falls $\frac{p^2}{4} - q = 0$



keine reelle Lsg.

falls $\frac{p^2}{4} - q < 0$

aber zwei komplexe
Lösungen

Algebraische Gleichung n-ten Grades

$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 x + a_0 = 0 \qquad (a_n \neq 0)$

besitzt höchstens n reelle Lösungen.

Bis einschließlich 4. Grades lassen sich allgemein Formelausdrücke herleiten.

Praxis : Verwendung von numerische Näherungsverfahren
Bsp. Newton-Verfahren

<u>Fundamentalsatz der Algebra</u>

Eine algebraische Gleichung n-ten Grades besitzt im Körper **C** der komplxen Zahlen stets genau n Lösungen.

Bsp.: $x^2 + x + 2{,}5 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-10}}{2} = \frac{-1}{2} \pm \frac{\sqrt{-9}}{2}$$

$$= -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} j$$

Wurzelgleichungen

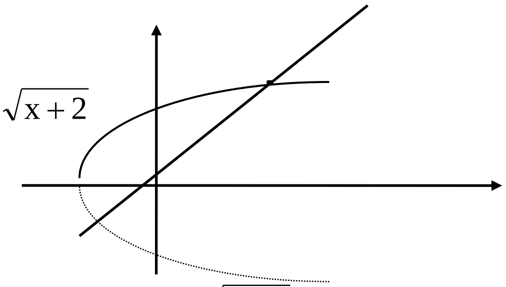
Bsp.: $\sqrt{x+2} = x$

Skizze :

$f_1(x) = \sqrt{x+2}$

$f_2(x) = x$

$f_1(x) = f_2(x)$ d.h. gesucht sind die Schnittpunkte der Fkt.



$$x + 2 = x^2$$
$$\Leftrightarrow 0 = x^2 - x - 2$$
$$\Leftrightarrow x_{1,2} = -\frac{-1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2}$$
$$= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}}$$
$$= \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$$
$$x_1 = -1 \quad x_2 = 2$$

Somit {-1,2} sind mögliche Lösungen

Probe: x_1: $\sqrt{-1+2} = -1$ falsch

x_2: $\sqrt{2+2} = 2$ o.k.

Anm.: -1 ist Lsg. von $-\sqrt{x+2} = x$

Wurzelgleichungen werden durch Quadrieren gelöst. Beim Quadrieren können zusätzliche Lösungen entstehen. Anhand einer Probe wird die richtige Lösung bestimmt.

Grund für Problematik : Wir betrachten i.d.R. $+\sqrt{}$ oder $-\sqrt{}$ aber nicht $\pm\sqrt{}$.

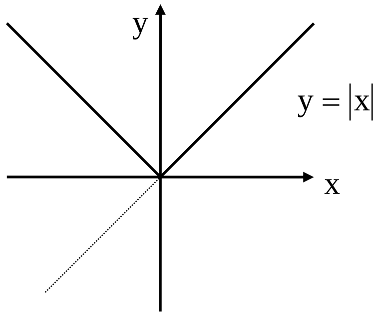
1.3.2 Betragsgleichung

Betrag einer reellen Zahl

Sei $a \in R$ $|a| := \begin{cases} a \text{ für } a \geq 0 \\ -a \text{ für } a < 0 \end{cases}$

Betragsfunktion

$$y = |x| = \begin{cases} x \text{ für } x \geq 0 \\ -x \text{ für } x < 0 \end{cases}$$



Die Punkte unter der x-Achse werden um die x-Achse nach oben geklappt

Analytische Lösung einer Betragsgleichung durch Fallunterscheidung

$$|2x-1| = -x+1$$

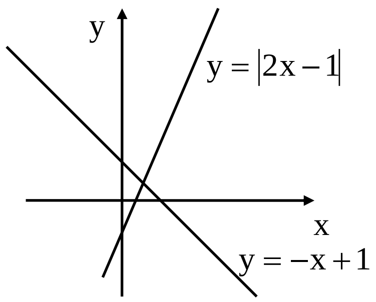
1\. Fall $2x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0{,}5$

$$2x - 1 = -x + 1 \qquad \text{Lsg. } x_1 = \frac{2}{3}$$

2\. Fall $2x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 0{,}5$

$$-(2x - 1) = -x + 1 \quad \text{Lsg. } x_2 = 0$$

Lösungsmenge $L = \left\{0, \frac{2}{3}\right\}$

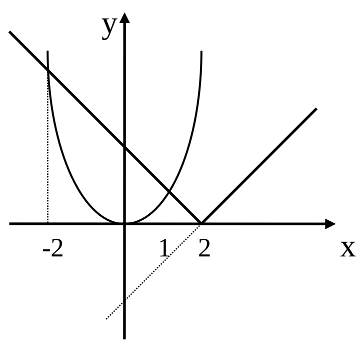


Bsp.: $|x-2| = x^2$

a) grafische Lösung

$f_1(x) = |x-2|$

$f_2(x) = x^2$



Lösungsmenge $L = \{-2, 1\}$

b) rechnerische Lösung

Fallunterscheidung

1.Fall $x - 2 \geq 0$: $\quad x - 2 = x^2 \quad / +2,\ -x$

$\Leftrightarrow\ x \geq 2 \quad 0 = x^2 - x + 2$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-8}}{2} \quad \text{keine reelle Lsg.}$$

2.Fall $x - 2 < 0$

$$-(x-2) = x^2 \qquad / +(x-2)$$

$$0 = x^2 + x - 2 \qquad x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

$$x_1 = -2 \qquad x_2 = 1$$

insgesamt $L = \{-2,1\}$

1.3.3 Ungleichungen

Wir betrachten Ungleichungend der Form

Term 1 $<$ Term 2 (bzw. Term 2 $>$ Term 1)

Term 1 $\leq$ Term 2 (bzw. Term 2 $\geq$ Term 1)

Bsp.: $\quad \dfrac{5}{2x+3} \leq 6 \qquad / \cdot (2x+3)$

1.Fall

$2x + 3 > 0$

d.h. $x > -\dfrac{3}{2}$

$5 \leq 6 \cdot (2x+3)$

$5 \leq 12x + 18 \qquad / -18$

$-13 \leq 12x \qquad /: 12$

$-\dfrac{13}{12} \leq x$

2.Fall

$2x + 3 < 0$

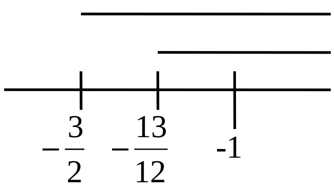
d.h. $x > -\dfrac{3}{2}$

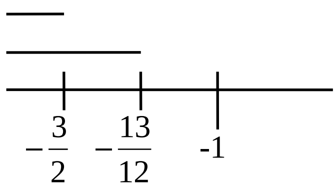
$5 \geq 6 \cdot (2x+3)$

$5 \geq 12x + 18$

$-13 \geq 12x$

$-\dfrac{13}{12} \geq x$





$$L_1 = \left\{ x \mid x > -\frac{3}{2} \wedge x \geq -\frac{13}{12} \right\} \qquad L_2 = \left\{ x \,\middle|\, x < -\frac{3}{2} \wedge x \leq -\frac{13}{12} \right\}$$

$$= \left\{ x \,\middle|\, x \geq -\frac{13}{12} \right\} \qquad = \left\{ x \mid x < -\frac{3}{2} \right\}$$

Gesamtlösung $L_1 \cup L_2 = \left\{ x \,\middle|\, x < -\frac{3}{2} \vee x \geq -\frac{13}{12} \right\}$

Umformen von Ungleichungen
Eine Ungleichung bleibt erhalten bei
- beidseitige Addition / Subtraktion desselben Wertes
- beidseitige Multiplikation mit dem Faktor $a \in R \;\; a > 0$

wird umgekehrt bei
- beidseitige Multiplikation mit dem Faktor $a \in R \;\; a < 0$

Bsp.: $4 < 5$

Addition $4 + 2 < 5 + 2$

Subtrakton $4 - 10 < 5 - 10$

Multiplikation $4 \cdot 3 < 5 \cdot 3$ wichtig $3 > 0$

aber

Multiplikation $4 \cdot (-3) > 5 \cdot (-3)$

Bsp. $\frac{2}{2x+1} < |x+2|$

1.Fall $2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq -1 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$

$2 < |x+2| \cdot (2x+1)$

1.1 $x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$

$2 < (x+2) \cdot (2x+1)$

$\Leftrightarrow \; 0 < 2x^2 + x + 4x + 2 - 2$

$\Leftrightarrow \; 0 < 2x^2 + 5x$

$\Leftrightarrow \; 0 < x(2x+5)$ Nullstelle: $x_1 = 0 \;\; 2x_2 + 5 = 0 \Rightarrow x_2 = -\frac{5}{2}$

$$L_{1.1} = \left\{ x \,\middle|\, \left(x < -\frac{5}{2} \vee x > 0 \right) \wedge x \geq -2 \wedge x \geq -\frac{1}{2} \right\}$$

$$= \{ x \mid x > 0 \}$$

1.2 $x + 2 < 0 \Leftrightarrow x < -2$

da in 1.Fall auch gilt $x \geq -\frac{1}{2} \Rightarrow L_{1.1} = \{ \; \}$

2. Fall $\quad 2x+1<0 \Leftrightarrow 2x<-1 \Leftrightarrow x<-\frac{1}{2}$

$$2>|x+2|\cdot(2x+1)$$

2.1 $\quad x+2\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -2$

$$2>(x+2)(2x+1)$$

$$\Leftrightarrow \quad 0>2x^2+x+4x+2-2$$

$$\Leftrightarrow \quad 0>2x^2+5x$$

$$\Leftrightarrow \quad 0>x(2x+5) \qquad \text{Nullstelle: } x_1=0 \quad x_2=-\frac{5}{2}$$

$$L_{2.1}=\left\{x \mid x<0 \ \wedge x>-\frac{5}{2}\wedge x<-\frac{1}{2}\wedge x\geq -2\right\}$$

$$=\left\{x\geq -2\wedge x<-\frac{1}{2}\right\}$$

2.2 $\quad x+2<0 \Leftrightarrow x<-2$

$$2>-(x+2)(2x+1)$$

$$0>-2x^2-x-4x-2-2$$

$$0>-2x^2-5x-4 \qquad \text{Nullstelle: } \underbrace{x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-32}}{-4}}_{\text{keine reele Lösung}}$$

$$L_{2.2}=\left\{x \mid x<-2\wedge x<-\frac{1}{2}\right\}$$

$$=\left\{x \mid x<-2\right\}$$

$$L=L_{1.1}\cup L_{1.2}\cup L_{2.1}\cup L_{2.2}=\left\{x \mid (x>0)\vee\left(x\geq -2\wedge x<-\frac{1}{2}\right)\vee(x<-2)\right\}$$

$$=\left\{x \mid (x>0)\vee x<-\frac{1}{2}\right\}$$

1.4 Binomischer Lehrsatz

$$(a+b)^n=a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}\cdot b+\binom{n}{2}a^{n-2}\cdot b+\ldots+\binom{n}{n-1}a\cdot b^{n-1}+b^n$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}\cdot b^k$$

wobei für die Binomialkoeffizieten $\binom{n}{k}$ (Lese: n über k) gilt

$$\binom{n}{k}=\frac{n\cdot(n-1)(n-2)\ldots[n-(k-1)]}{k!}$$

Def.: "k Fakultät" $k! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k$

für $k \in \mathbb{N}_0$ speziell $0! = 1$

Summenschreibweise :

$$\sum_{i=n}^{m} a_i := a_n + a_{n+1} + \ldots + a_m$$

Bsp.: $$\sum_{i=3}^{6} i^2 = 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2$$

Die Binomialkoeffizienten sind aus dem Pascal`schen Dreieck ablesbar

0.Zeile					1				
1.Zeile				1		1			
2.Zeile			1		2		1		
3.Zeile		1	+	3	+	3		1	
4.Zeile	1		4		6		4		1
...									
...									
...									

$$\binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1}$$

$\binom{n}{k}$ ist n - te Zeile an letzter Stelle wobei (k = 0,1,2.…)