4. Folgen, Reihen, Grenzwerte

4.1. Grundlagen

Def.: Eine Zahlenfolge ist eine geordnete Menge von Elementen a_i (Glieder)

$$< a_n >= a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \qquad n \in N \qquad a_i \in R$$

Bsp.:

$$< a_n >= 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots \qquad a_n = \frac{n-1}{n}$$

$$< a_n >= 1,4,9,16, \ldots \qquad a_n = n^2$$

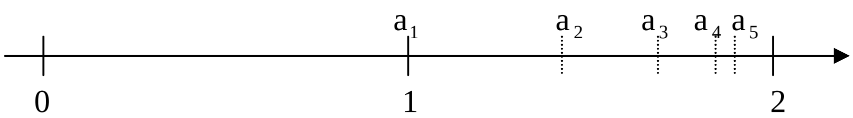
$$< a_n >= 3,3,3, \ldots \qquad a_n = 3$$

$$< a_n >= 1,2,1,2,1,2, \ldots \qquad a_n = \begin{cases} 1 & n \text{ ungerade} \\ 2 & n \text{ gerade} \end{cases}$$

Darstellung auf der Zahlengeraden

Bsp.:

$$a_n = \frac{2n-1}{n} \qquad < a_n >= 1, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{9}{5}, \ldots$$



Def.:

Eine Folge $< a_n >$ heißt beschränkt falls es ein $S \in R$ gibt mit $|a_i| \le S \quad \forall i$

Bsp.:

(1) $< a_n >= 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots \qquad a_n = \frac{1}{n}$

ist beschränkt Schranke $S = 1$

(2) $< a_n >= -1, +1, -1, +1, \ldots \qquad a_n = (-1)^n$

ist beschränkt Schranke $S = 1$

(3) $< a_n >= 1,4,9, \ldots \qquad a_n = n^2$

ist nicht beschränkt

Bew.: Ang. $< a_n >$ beschränkt $\Rightarrow \exists$ Schranke S mit $|a_n| \le S \quad \forall n$

Wähle $n_s \ge S \Rightarrow |a_{n_s}| = n_s{}^2 \ge S^2 > S$

d.h. $|a_n| > S$ Widerspruch zur Annahme

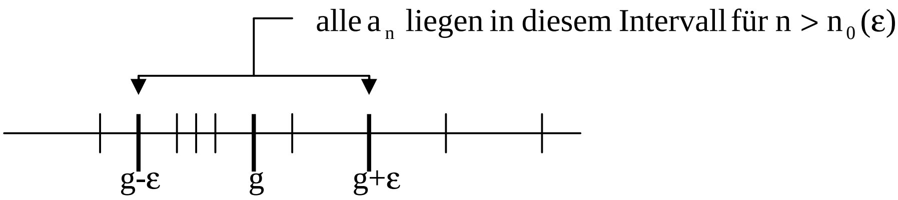
Def.:

Eine reelle Zahlenfolge $< a_n >$ heißt konvergent gegen g (Grenzwert) falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zahl $n_0 \in N$ gibt, so daß

$$|a_n - g| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq n_0$$

Wir schreiben $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$ (Limes von a_n für n gegen Unendlich gleich g)

d.h. Der Abstand zwischen den Folgengliedern a_n und dem Grenzwert g wird mit wachsendem Index n beliebig klein.



Außerhalb des Intervalls [g-ε ; g+ε] liegen nur endlich viele Glieder der Folge, egal wie klein ε gewählt wird.

Def.: Eine Folge die keinen Grenzwert besitzt heißt divergent

Bsp.:

$a_n = \dfrac{1}{n}$ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

$a_n = \dfrac{n-1}{n}$ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$

$a_n = n^2$ $\qquad$ divergent (uneigentlicher Grenzwert $+\infty$)

$a_n = (-1)^n$ $\qquad$ divergent

$a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} a_n = e$

Bsp.:

$a_n = \dfrac{n+1000}{n}$ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} a_n = ?$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1000}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1000}{n}}{1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1000}{n}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 1$$

Bew.:

Zu zeigen: zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_0(\varepsilon)$, so daß $|a_n - g| = |a_n - 1| < \varepsilon$

Sei $\varepsilon > 0$ Frage: $n_0(\varepsilon) = ?$

$$|a_n - 1| = \left|\frac{n+1000}{n} - 1\right| = \left|1 + \frac{1000}{n} - 1\right| = \left|\frac{1000}{n}\right| = \frac{1000}{n} \overset{!}{<} \varepsilon$$

Wähle n_0 so, daß $\frac{1000}{n_0} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1000}{\varepsilon} < n_0$

Sei $n > n_0$

$$|a_n - 1| = \text{K} = \frac{1000}{n} \underset{\text{da } n > n_0}{<} \frac{1000}{n_0} < \varepsilon$$

Rechnen mit Grenzwerten

Sei $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$

Dann

I. $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$

II. $\lim_{n\to\infty} c \cdot a_n = c \cdot a$ für $c =$ konst. $c \in R$

III. $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b$

IV. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$ falls $b \neq 0$

Bew. zu I:

Zu zeigen: $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$

z. j. $\varepsilon > 0$ $\exists$ ein $n_0(\varepsilon)$ mit $|a_n + b_n - (a+b)| < \varepsilon$ für $n > n_0(\varepsilon)$ (*)

Es gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$

d.h. $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n > n_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ (1.)

und $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n > n_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ (2.)

Wir zeigen (*): Sei $\varepsilon > 0$ gegeben

$$|a_n + b_n - (a+b)| = |a_n + b_n - a - b| = |a_n - a + b_n - b|$$

$$\underset{\text{da } |x+y| \leq |x|+|y|}{\leq} |a_n - a| + |b_n - b| \underset{(1)\wedge(2)}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad (**) \quad \text{für } n > n_1(\varepsilon) \text{ und } n > n_2(\varepsilon)$$

Setze $n_0(\varepsilon) = \text{Maximum}\{n_1(\varepsilon); n_2(\varepsilon)\}$

dann $\underset{(**)}{\Rightarrow}$ $|a_n + b_n - (a+b)| < \varepsilon$ für $n > n_0(\varepsilon)$

Spezielle Folgen

Geometrische Folge

$< a_n >$ heißt geometische Folge, falls

$\frac{a_{i+1}}{a_i} = q \quad (q \text{ fest}) \; i = 1,2,\ldots \text{ und } a_1 = 1$

Bsp.: $< a_n >= 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \ldots \qquad \frac{a_i}{a_{i+1}} = \frac{1}{2}$

Arithmetische Folge

$< a_n >$ heißt arithmetische Folge, falls

$a_{i+1} - a_i = d \quad (d \text{ fest}) \; i = 1,2,\ldots$

Bsp.: $< a_n >= 3;5;7;9;\ldots \qquad a_{i+1} - a_i = 2$

Reihen

Bsp.: $< a_n >= 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \ldots$ (geometr. Folge)

Frage: $\sum_{i=1}^{n} a_i = ?$

$\sum_{i=1}^{1} a_i = a_1 = 1 \qquad \sum_{i=1}^{2} a_i = a_1 + a_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$\sum_{i=1}^{3} a_i = a_1 + a_2 + a_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$

$\sum_{i=1}^{4} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{8}{8} + \frac{4}{8} + \frac{2}{8} + \frac{1}{8} = \frac{15}{8}$

$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = ? \qquad < S_n >= 1; \frac{3}{2}; \frac{7}{4}; \frac{15}{8}; \frac{31}{16} \qquad S_n = \frac{2 \cdot 2^{n-1} - 1}{2^{n-1}}$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2 \cdot 2^{n-1} - 1}{2^{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 \cdot 2^{n-1}}{2^{n-1}} - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = \left(\lim_{n\to\infty} \right) - 0 = 2$$

Def.:

Gegeben sei eine bel. Folge $< a_m >$. Durch Addition der Folgenglieder entsteht eine Summenfolge S_n

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

Die Summe $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ heißt Reihe ("Summation aller Folgenglieder")

Die Summe der ersten n - Glieder $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ heißt Teilsumme (Partialsumme)

Bsp.:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 2$$

Geometrische Reihe

Die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} q^{i-1} = 1 + q + q^2 + \dots + q^{i-1} + \dots$ $\quad (q \in R \text{ fest})$

heißt geometrische Reihe.

Bsp.: $\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 2$

Satz

Die geometrische Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} q^{i-1}$ ist für $|q| < 1$ konvergent und für $|q| \geq 1$ divergent

Bew.: Wir zeigen die Partialsumme konv. (div.)

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} q^{i-1} = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}$$

$$\left.\begin{aligned} S_n &= 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} \\ q \cdot S_n &= \phantom{1 + {}} q + q^2 + \dots + q^{n-1} + q^n \end{aligned}\right\} -$$

$$S_n - q \cdot S_n = 1 \qquad - q^n$$

$$\Leftrightarrow S_n (1-q) = 1 - q^n \Leftrightarrow S_n = \frac{1-q^n}{1-q} \qquad (q \neq 1)$$

Sei $|q| < 1$ dann

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q} \qquad (\text{da } q^n \to 0 \text{ für } |q| < 1)$$

d.h. $\sum_{i=1}^{\infty} q^{i-1} = \dfrac{1}{1-q} \qquad |q| < 1$

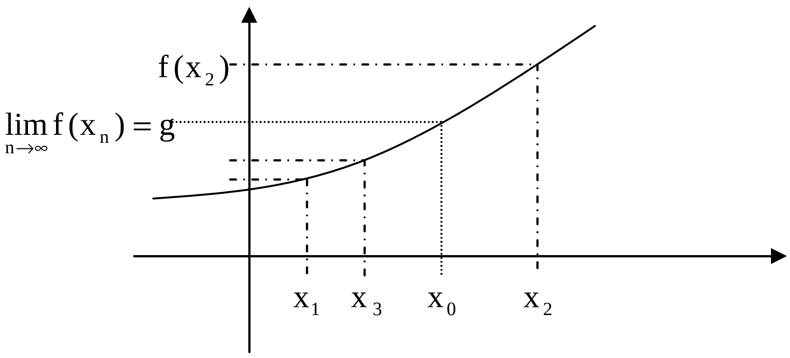
Sei $|q| \geq 1$

$$|S_n| = \left|\frac{1-q^n}{1-q}\right| = \frac{1}{|1-q|} \cdot \underbrace{|1-q^n|}_{\to\infty(n\to\infty)} \to \infty$$

$$\text{Bsp.}: \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{i-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

4.2. Grenzwert einer Funktion

Frage: Was ist $\lim_{x\to x_0} f(x)$



Welchem Wert nähert sich der Funktionswert f(x), wenn die Argumente x sich x_0 nähern ?

Die Argumente x nähern sich $x_0 \quad x \to x_0$

Beschreibung durch Folge $< x_n >$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ ansonsten ist $< x_n >$ beliebig.

Zu $< x_n >$ betrachten wir $< f(x_n) >$ dies ist eine Folge! (auf der y - Achse)

d.h. es ist sinnvoll den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = g \qquad \text{zu betrachten.}$$

Def.:

f(x) sei in einer Umgebung von x_0 (Intervall) definiert.

Falls für jede Folge $< x_n >$ $(x_n \neq x_0)$

$x_n \in$ Definitionsbereich von f(x) mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = g$$

so heißt g der Grenzwert von f(x) für $x \to x_0$

Schreibweise: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = g$

Wichtig: Die Funktion f(x) muß an der Stelle x_0 selbst nicht definiert sein.

Rechenregeln für Grenzwerte von Funktionen

Rechenregeln für Grenzwerte von Funktionen ergeben sich aus den Rechenregeln für Grenzwerte von Folgen.

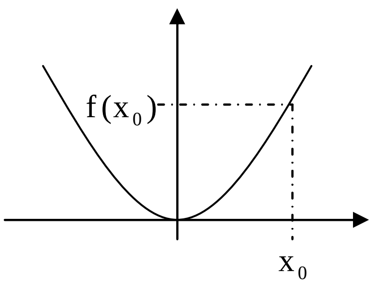
I. $\lim\limits_{x\to x_0}[f_1(x) \pm f_2(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f_1(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)$

II. $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

III. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$ falls $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$

Bsp.:

$f(x) = x^2$



Sei $x_0 \in R$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} x^2 = x_0^{\ 2} = f(x_0)$

Grund: Die Parabel f(x) kann "in einem Zug" gezeichnet weden $\Rightarrow$ $f(x) = x^2$ ist "stetig"

Verwende dann die Beziehung $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ zur formalen Definition der Stetigkeit.

Def.:

Eine in x_0 und in einer Umgebung (Intervall) von x_0 def. Funktion f(x) heißt an der Stelle x_0 <u>stetig</u> falls der Grenzwert von f(x) für $x \to x_0$ existiert und gleich dem Funktionswert $f(x_0)$ ist

d.h. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Eine Funktion heißt stetig im Intervall (a, b), wenn sie an jeder Stelle $x_0 \in (a,b)$ stetig ist.

Bsp.:

(1).

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)\cdot(x+1)}{(x-1)}$$

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \qquad \text{Nullstelle}: g(x)=0 \wedge h(x)\neq 0 \quad x_1 = -1$$

$$\text{Polstelle}: g(x)\neq 0 \wedge h(x) = 0 \quad \text{keine}$$

$$\text{Def. Lücke}: g(x) = 0 \wedge h(x) = 0 \quad x_2 = 1$$

$$f(x) = \frac{(x-1)\cdot(x+1)}{(x-1)} = \begin{cases} x+1 & x\neq 1 \\ \text{nicht def.} & x=1 \end{cases}$$

Wir untersuchen die Stetigkeit an der Stelle $x_0 = 1$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\cdot(x+1)}{(x-1)\cdot 1} \underset{\text{da } x\neq 1}{=} \lim_{x\to 1}(x+1) = 2$$

d.h. der Grenzwert $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existiert.

ABER: $f(x)$ ist in $x_0 = 1$ nicht definiert

$\Rightarrow f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ ist in $x_0 = 1$ nicht stetig!

Die Definitionslücke $x_0 = 1$ ist stetig behebbar!

d.h.

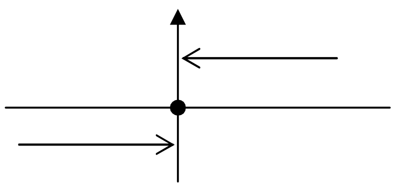
$$\text{Setze} \quad f_{neu}(x) = \begin{cases} f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} & x\neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$$

Dann $f_{neu}(x)$ def. auf R $\quad f_{neu}(x)$ ist stetig in $x_0 = 1$

und $f_{neu}(x) \equiv f(x)$ für $x \neq 1$.

(2).

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x<0 \\ 0 & x=0 \\ 1 & x>0 \end{cases}$$



$f(x)$ ist unstetig in $x_0 = 0$

$f(0) = 0$ ist zwar def.

aber $\lim_{x\to 0} f(x)$ existiert nicht

Bew.: Wähle $x_n^{(1)} = \frac{1}{n} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f\left(x_n^{(1)}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$

Wähle $x_n^{(2)} = -\frac{1}{n} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f\left(x_n^{(2)}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} -1 = -1$

d.h. $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(x_n^{(1)}\right) \neq \lim\limits_{n\to\infty} f\left(x_n^{(2)}\right)$

Satz

Summe aus Produkt von stetigen Funktionen sind stetig.

Der Quotient $q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ von stetigen Funktionen ist stetig an allen Stellen mit $g(x) \neq 0$.