$$= \frac{1}{25}\int \frac{1}{\left(\frac{x-3}{5}\right)^2 + 1}\,dx = \frac{1}{25}\int \frac{1}{u^2+1}\,5du$$

$$u = \left(\frac{x-3}{5}\right) \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{5} \quad \Leftrightarrow \quad dx = 5du$$

$$= 5\cdot\frac{1}{25}\int \frac{1}{u^2+1}\,du = \frac{1}{5}\cdot \arctan u + c_2$$

$$= \frac{1}{5}\cdot \arctan\left(\frac{x-3}{5}\right) + c_2$$

Insgesamt:

$$\int \frac{3x-4}{x^2-6x+34}\,dx = \frac{3}{2}\ln\left|x^2-6x+34\right| + \arctan\left(\frac{x-3}{5}\right) + c$$

Bei mehrfach komplexen Nullstellen (Vielfachheit >1) ist das Verfahren für mehrfach reelle Nullstellen und das Verfahren für einfach komplexe Nullstellen zu koppeln.

Bsp.: $\int \frac{14x^2-51x+43}{x^3-7x^2+17x-15}\,dx$

Nullstelle des Nenners:

$$x^3-7x^2+17x-15=0 \quad \text{ergibt} \quad x_1=3 \quad x_2=2-i \quad x_3=2+i$$

Als Produktdarstellung des Nenners erhält man $N(x) = (x-3)\cdot(x^2-4x+5)$. Der quadratische Term, der die konjugiert komplexen Nullstellen liefert, wird nicht zerlegt.

Partialbruchzerlegung:

$$\frac{14x^2-51x+43}{x^3-7x^2+17x-15} = \frac{A}{x-3} + \frac{Bx+C}{x^2-4x+5}$$

Multiplikation mit dem Hauptnenner ergibt

$$14x^2-51x+43 = A(x^2-4x+5) + (Bx+C)\cdot(x-3).$$

Koeffizientenbestimmung durch Einsetzen beliebiger Werte für x:

$$x=3: \quad 16 = 2A$$

$$x=0: \quad 43 = 5A - 3C$$

$$x=2: \quad -3 = A - 2B - C$$

Folglich ist $A = 8, B = 6, C = -1$

Integration:

$$\int \frac{14x^2-51x+43}{x^3-7x^2+17x-15}dx = 8\int \frac{dx}{x-3} + \int \frac{6x-1}{x^2-4x+5}dx =$$

$$= 8\int \frac{dx}{x-3} + \int \frac{3(2x-4)+11}{x^2-4x+5}dx =$$

$$= 8\int \frac{dx}{x-3} + 3\int \frac{2x-4}{x^2-4x+5}dx + 11\int \frac{dx}{(x-2)^2+1} =$$

$$\underline{\underline{= 8\ln|x-3| + 3\ln|x^2-4x+5| + 11\arctan(x-2) + C}}$$

<u>Zusammenfassung: Integration durch Partialbruchzerlegung</u>

Gegeben sei die gebrochenrationale Fkt.: $f(x)$

Gesucht ist: $\int f(x)\,dx$

Falls $f(x)$ unecht gebrochenrational, dann Zerlegung per Polynomdivision in:

$$f(x) = p(x) + \frac{Z(x)}{N(x)}$$

mit $p(x)$ als Polynom und $r(x) = \frac{Z(x)}{N(x)}$ echt gebrochenrational.

$\int p(x)dx$ ist lösbar.

$\int \frac{Z(x)}{N(x)}dx$ über Partialbruchzerlegung berechnen.

Partialbruchzerlegung von $r(x) = \frac{Z(x)}{N(x)}$

1. Bestimmung aller reellen Nullstellen von N(x) einschließlich der Vielfachheit
   Nullst. $= x_1, x_2, ... x_n$

2. $\frac{Z(x)}{N(x)} = \frac{a_1}{(x - x_1)} + \frac{a_2}{x - x_2} + ... + \frac{a_n}{x - x_n}$

   Hauptnenner ergibt : $\frac{Z(x)}{N(x)} =$

$$\frac{a_1 \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) \cdot (x - x_n) + a_2 (x - x_1) \cdot (x - x_3) \cdot (x_1 - x_n) .. + a_n (x - x_2) .. (x - x_n)}{(x - x_1) \cdot (x - x_2) ... (x - x_n)}$$

$\Rightarrow$ *lineares* Gleichungssystem für $a_1, a_2, ... a_n$
Lösung dieses Gls. ergibt gesuchte Partialbruchzerlegung.

(Alternative : Einsetzen z.B. der Nennernullstellen $x_1, x_2, ... x_n$ oder bel. Werte liefert ebenfalls das obige lin. Gls.)

Damit : $\int f(x)\,dx = \int p(x) dx + a_1 \int \frac{1}{x - x_1} dx + a_2 \int \frac{1}{x - x_2} dx + ... + a_n \int \frac{1}{x - x_n} dx$

mit $\int \frac{1}{x - x_i} dx = \ln|x - x_i| + c$ *ist die Lösung gefunden.*

Falls x_0 Nullstelle mit Vielfachheit $k > 1$ Dann Ansatz :

$$\frac{Z(x)}{N(x)} = \frac{a_k}{(x - x_0)^k} + \frac{a_{k-1}}{(x - x_0)^{k-1}} + ... + \frac{a_1}{(x - x_0)^1} + \text{"weitere Nullstellen"}$$

Falls die Nullstelle des Nenners komplex und einfach (Vielfachheit 1) ist, dann :
Neuer Ansatz :

$$\int \frac{f'(x) + c}{f(x)} dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx + \int \frac{c}{f(x)} dx$$
$$= \ln|f(x)| + c_1$$

wobei f(x) vom Grad 2 ist! (komplexe + konjugiert komplexe Lösung)

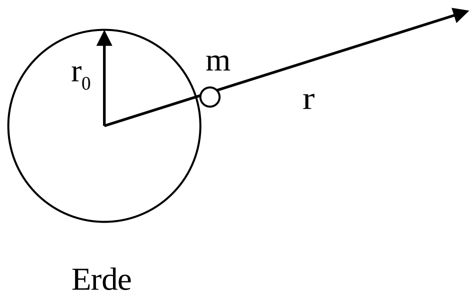
Bei komplexen Nullstellen mit Vielfachheit > 1 sind die Verfahren für reelle Nullstellen mit Vielfachheit > 1 und für komplexe einfache Nullstellen zu verbinden.

6.3 Uneigentliche Integrale

6.3.1 Unbeschränktes Integrationsinterval

$\Rightarrow$ *Integrale*, bei denen
- das Integrationsintervall unbeschränkt oder
- das Integral unbeschränkt ist

Bsp.: Eine Masse m soll von der Erdoberfläche ins "Unendliche" gebracht werden. Welche Arbeit ist erforderlich?



$$r = \infty$$

$$F = \gamma \cdot \frac{m_k \cdot M_E}{r^2}$$

$$\gamma = 66{,}7 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$$

$$M_E = 5{,}98 \cdot 10^{24} kg$$

$$r_0 = 6300 km$$

a) *Bewegung in den Abstand r*

$$Arbeit: \; W = \int_{r_0}^{r} F(r)dr = \int_{r_0}^{r} \frac{\gamma \cdot m_k \cdot M_E}{r^2} dr$$

$$= \gamma \cdot m_k \cdot M_E \int_{r_0}^{r} \frac{1}{r^2} dr = \gamma \cdot m_k \cdot M_E \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_0}^{r}$$

$$= \gamma \cdot m_k \cdot M_E \left(-\frac{1}{r} - \left(-\frac{1}{r_0} \right) \right) = \gamma \cdot m_k \cdot M_E \cdot \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right)$$

b) $r = \infty$

$$\int_{r_0}^{\infty} F(r)dr = \lim_{r\to\infty}\int_{r_0}^{r} F(r)dr = \lim_{r\to\infty} \gamma \cdot m_k \cdot M_E \cdot \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right)$$

$$= \gamma \cdot m_k \cdot M_E \cdot \frac{1}{r_0}$$

$$= 66{,}7 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \cdot m_k \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\, kg \cdot \frac{1}{6300\, km}$$

$$= \frac{66{,}7 \cdot 5{,}98}{6300} \cdot \frac{10^{-11} \cdot 10^{24}}{10^3} \cdot \frac{Nm^2}{kg^2 \cdot m} \cdot kg \cdot m_k$$

$$= \frac{66{,}7 \cdot 5{,}98}{6300} \cdot 10^{10}\, Nm \cdot \frac{m_k}{kg}$$

Zusammenfassung : Berechnung von $\int_a^{\infty} f(x)dx$

1. *Berechne zunächst*

$$I(\lambda) = \int_a^{\lambda} f(x)dx \qquad (\lambda > a)$$

2. *Falls* $I(\lambda)$ für alle $\lambda > a$ existiert, betrachten wir den Grenzwert von $I(\lambda)$ für $\lambda \to \infty$

falls dieser Grenzwert existiert, ist der Ausdruck $\int_a^{\infty} f(x)dx$ wie folgt definiert :

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{\lambda\to\infty} I(\lambda) = \lim_{\lambda\to\infty}\int_a^{\lambda} f(x)dx$$

Das uneigentliche Integral $\int_a^{\infty} f(x)dx$ nennt man in diesem Fall konvergent.

Falls der Grenzwert nicht existiert ist das uneigentliche Integral divergent.

In analoger Weise wird das Integral $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ definiert :

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{x\to-\infty} I(\lambda) = \lim_{x\to-\infty}\int_{\lambda}^{a} f(x)dx$$

Für das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ ergibt sich :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)dx$$

Bsp.:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = ?$$

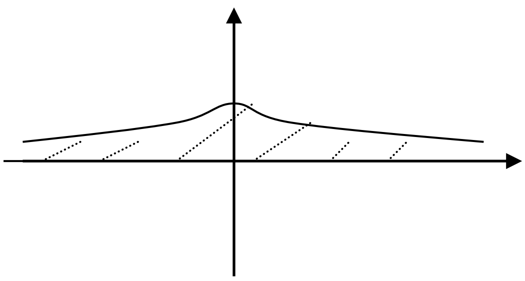
Vorüberlegungen:

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad \text{Polstelle: keine da } (1+x^2) > 0 \qquad f(x) \text{ ist stetig}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{1-x^2} = 0 \qquad \Rightarrow \ x-\text{Achse ist für } x \to \pm\infty \text{ Asymptote}$$

Funktionsskizze:



$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2} dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$= 2 \cdot \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx \qquad \text{da } f(x) \text{ symmetrisch zur } y-\text{Achse ist.}$$

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{\lambda\to\infty} \int_{0}^{\lambda} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{x\to\infty} \left[\arctan x\right]_0^\lambda$$

$$= \lim_{\lambda\to\infty} \arctan\lambda = \frac{\Pi}{2}$$

Somit:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = 2 \cdot \frac{\Pi}{2} = \Pi$$

6.3.2. Unbeschränkter Integrand

Bsp.:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Frage: $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = ?$

$f(x)$ ist im Intervall $(0,1]$ nicht beschränkt.

Ansatz: statt $\int_0^1$ *betrachten wir*: $\int_\lambda^1$ *mit* $0 < \lambda < 1$ *und bilden anschließend den Grenzwert.*

$$\int_\lambda^1 \frac{1}{x}\,dx = \left[\ln|x|\right]_\lambda^1 = \ln|1| - \ln|\lambda| = 0 - \ln\lambda$$

$$\lim_{\lambda\to 0}\int_\lambda^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\lambda\to 0}(-\ln\lambda) = ?$$

Sei $\lambda = e^{-50} \Rightarrow -\ln(e^{-50}) = 50$

Allg.: $\lambda_n = e^{-n} \Rightarrow -\ln(e^{-n}) = n$

$$\Rightarrow \lim_{\lambda\to 0}(-\ln\lambda) = +\infty$$

d.h. $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ existiert nicht!

$\Rightarrow$ Bei der Integration muß man auf Polstellen (Nennerfkt. $= 0$) achten!

Zusammenfassung falls die Fkt. $f(x)$ für $x \to x_0$ nichtbeschränkt ist, dann wird das Integral $\int_{x_0}^b f(x)\,dx$ wie folgt untersucht:

1) Berechne $I(\lambda) = \int_\lambda^b f(x)\,dx \quad x_0 < \lambda < b$
2) Falls $I(\lambda)$ für alle λ und $x_0 < \lambda < b$ existiert, betrachte Grenzwert $\lim_{\lambda\to x_0} I(\lambda)$

   Falls dieser Grenzwert existiert, dann ist $\int_{x_0}^b f(x)\,dx = \lim_{x\to x_0} I(\lambda)$ andernfalls existiert $\int_{x_0}^b f(x)\,dx$ nicht.

Bsp.:

(1) $\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx = ?$

$$I(\lambda) = \int_\lambda^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_\lambda^1 = -\frac{1}{1} - \left(-\frac{1}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda} + 1$$

$$\lim_{\lambda \to 0} I(\lambda) = \lim_{\lambda \to 0}\left(\frac{1}{\lambda} + 1\right) = +\infty$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx \text{ exisiert nicht!}$$

Alternativer Lösungsweg :

Betrachte : $f_1(\lambda) = \frac{1}{x}$ $f_2(x) = \frac{1}{x^2}$

Bekannt: $\int \frac{1}{x}\,dx$ *existiert nicht*

Für $0 < x < 1$ gilt $x^2 < x \Leftrightarrow 1 \le \frac{x}{x^2} \Leftrightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{x^2}$

Somit: $\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx > \int_0^1 \frac{1}{x}\,dx \to +\infty$

(2) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = ?$ unbeschränkter Integrand

$$I(\lambda) = \int_\lambda^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int_\lambda^1 \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\,dx = \int_\lambda^1 x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \left[2 \cdot x^{\frac{1}{2}}\right]_\lambda^1$$

$$= \left(2 \cdot 1^{\frac{1}{2}} - 2 \cdot \lambda^{\frac{1}{2}}\right) = 2 - 2\sqrt{\lambda}$$

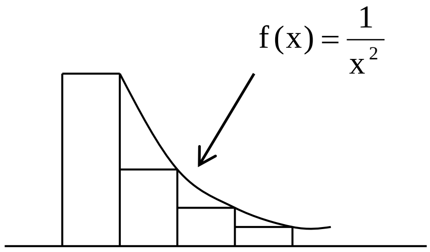
$$\lim_{\lambda \to 0} I(\lambda) = \lim_{\lambda \to 0} 2 - 2\sqrt{\lambda} = 2$$

Somit: $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2$

(3) Ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergent ?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots$$

Funktion: $f(n) = \frac{1}{n^2}$



Betrachte Erweiterung $f(x) = \frac{1}{x^2}$ für $x \in R$ von $f(n) = \frac{1}{n^2}$

Anschaulich erkennt man :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 1 + \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = \lim_{n \to \infty} [1 + \left(-\frac{1}{x}\right)]_1^{\infty} = 1 - \left(-\frac{1}{1}\right) = 2$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ ist konvergent.}$$

(4) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^2} dx =$

$u = x + 1 \qquad dx = du$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{u^2} du = \lim_{r \to \infty} \int_{-r}^{+r} u^{-2} du = \lim_{r \to \infty} \left[-u^{-1}\right]_{-r}^{+r} = \lim_{r \to \infty} \left(-\frac{1}{r} - \frac{1}{r}\right) = \lim_{r \to \infty} \frac{-2}{r} = 0$$

Aber $\quad f(x) = \frac{1}{(x+1)^2} > 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx > 0,\ da\ \Delta x > 0 \quad \Rightarrow ?$

Grund : Man darf nicht über Polstellen (für x = -1 wird der Nenner 0!) integrieren!

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^2} dx = \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{(x+1)^2} dx + \int_{-1}^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^2} dx$$

$\downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow$

exist.nicht! <== exist. nicht exist. nicht

(5) $\int_1^\infty \frac{1}{x^3}\,dx = ?$

$$I(\lambda) = \int_1^\lambda \frac{1}{x^3}\,dx = \int_1^\lambda x^{-3}dx = \left[-\frac{1}{2}x^{-2}\right]_1^\lambda = -\frac{1}{2}\lambda^{-2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\lambda^2}$$

$$\lim_{\lambda\to\infty} I(\lambda) = \lim_{\lambda\to\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\lambda^2}\right) = \frac{1}{2}$$

$Somit: \int_1^\infty \frac{1}{x^3}\,dx = \frac{1}{2}$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = ?$$

1.*Fall* $\alpha = 1$

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx \quad exist.\,nicht$$

Sei $\alpha \neq 1$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx \quad ist\ uneigentliches\ Integral$$

$$I(\lambda) = \int_\lambda^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \int_\lambda^1 x^{-\alpha}dx = \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_\lambda^1$$

$$= \frac{1^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{\lambda^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}$$

2.*Fall* $\alpha > 1 \Rightarrow -\alpha + 1 < 0$

$$\lim_{\lambda\to 0} I(\lambda) = \lim_{\lambda\to 0}\left(\frac{1^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{\lambda^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right)$$

$$\to \infty$$

d.h. $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx \quad exist.\,nicht$

3.*Fall* $\alpha < 1 \Rightarrow -\alpha + 1 > 0$

$$\lim_{\lambda\to 0} I(\lambda) = \lim_{\lambda\to 0}\left(\frac{1^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{\lambda^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right) = \frac{1^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} = \frac{1}{-\alpha+1}$$

Insgesamt:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{-\alpha+1} & für\,\alpha < 1 \\ \text{existiert nicht für } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

6.4 Numerische Integrationsmethoden

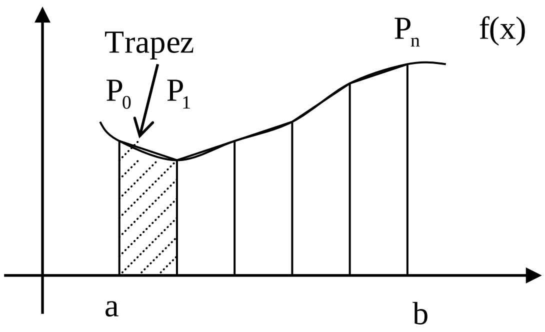
Probleme beim Einsatz analytischer Methoden

- Integration stetiger Funktionen ist nicht immer in geschlossener Form möglich

  Bsp.: $\int_0^x e^{-t^2}\,dt$
- Arbeitsaufwand zur Ermittlung einer analytischen Lösung ist zu hoch
- Funktion liegt als Funktionsgraph oder als Wertetabelle vor

Lösungsansatz: Einsatz numerischer Verfahren zur Bestimmung von Näherungslösungen

6.4.1 Trapezformel



Gesucht ist Näherungswert für:

$$\int_a^b f(x)dx$$

Zerlegen des Intervalls $[a, b]$ in n gleiche Teile der Breite:

$$h = \frac{b - a}{n} \quad \Rightarrow \quad x_0 = a; x_1; x_2; ...x_n = b$$

Kurvenbogen zwischen P_0 und P_1 (allg. P_i und P_{i+1}) wird durch Sehne ersetzt $\Rightarrow$ Trapez

Fläche des ersten Trapezes: $A_1 = h \cdot \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2}$

" zweiten " : $A_2 = h \cdot \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$

$\vdots \qquad \vdots$

" i-ten " : $A_i = h \cdot \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}$

Summation der Trapezflächen ergibt Näherungswert :

$$\int_a^b f(x)dx \approx A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \sum_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} h \cdot \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} =$$

$$= \frac{h}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) + f(x_i)$$

$$= \frac{h}{2} \cdot \left(f(x_0) + f(x_1) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_2) + f(x_3) + \ldots + f(x_{n-1}) + f(x_n) \right)$$

$$= \frac{h}{2} \cdot \left(f(x_0) + f(x_n) \right) + \frac{h}{2} \cdot \left(2f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 2f(x_{n-1}) \right)$$

$$= \frac{h}{2} \cdot \left(f(x_0) + f(x_n) + h\left(f(x_1) \right) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1}) \right)$$

$$= h \cdot \left(\frac{1}{2}\left(f(x_0) + f(x_n) \right) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right)$$

$mit \quad x_0 = a \quad und \quad x_i = x_0 + i \cdot h = a + i \cdot h \quad x_n = b$

$folgt:$

$$\underline{\int_a^b f(x)dx \approx h \cdot \left(\frac{1}{2}\left(f(a) + f(b) \right) + \sum_{i=1}^{n-1} f(a + i \cdot h) \right)}$$

Anm.: x_i *heißen Stützstellen*

$f(x_i)$ " *Stützwerte*

Der Näherungswert ist umso besser, je feiner die Intervallunterteilung ist.

Im Grenzfall $\lim\limits_{n\to\infty}$ liefert die Trapezformel den exakten Integralwert.

Bsp.: $\int_0^2 e^{-x^2} dx = ?$

Intervallunterteilung $n = 5 \;\Rightarrow h = \frac{2-0}{5} = 0{,}4$

0	0	1	
1	0,4		0,852
2	0,8		0,527
3	1,2		0,237
4	1,6		0,0773
5	2,0	0,0183	
		1,0183	1,6933

$$\int_0^2 e^{-x^2} dx \approx 0{,}4\left(\frac{1}{2}\sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2 \right) = 0{,}8808$$