2. Lineare Algebra

2.1. Lineare Gleichungssysteme, Gauß-Algorithmus

Bsp.:

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & 1x + 3y + 2z = 4 \\ \text{(II)} & -3x - 11y + 2z = 6 \\ \text{(III)} & 2x + 9y + 2z = 11 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & 1x + 3y + 2z = 4 \\ \hline 3 \cdot \text{I} & 3x + 9y + 6z = 12 \\ +\text{II} & -3x - 11y + 2z = 6 \\ \hline \text{(II)}' & 0x - 2y + 8z = 18 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} -2 \cdot \text{I} & -2x - 6y - 4z = -8 \\ +\text{III} & 2x + 9y + 2z = 11 \\ \hline \text{III}' & 0x + 3y - 2z = +3 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 1{,}5 \cdot \text{II}' & -3y + 12z = 27 \\ +\text{III}' & 3y - 2z = +3 \\ \hline \text{III}'' & 0y + 10z = 30 \end{array}$$

Äquivalentes Gls. :

$$\begin{array}{l} \text{I} \quad 1x + 3y + 2z = 4 \\ (\text{II}') \quad 0x - 2y + 8z = 18 \\ (\text{III}'') \quad 0x + 0y + 10z = 30 \\ \hline (\text{III}'') \Rightarrow z = 3 \end{array}$$

Einsetzen in (II′) $\quad -2y + 8 \cdot 3 = 18 \Leftrightarrow -2y = -6 \Leftrightarrow y = 3$

Einsetzen in I $\quad x + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 3 = 4 \qquad x = -11$

<u>Lösungsverhalten</u>

Ein lineares (m,n) Gleichungssystem besitzt entweder
- genau eine Lösung (Bsp.: 2 sich schneidende Geraden)
- unendlich viele Lösungen oder (Bsp.: 3 sich in einer Geraden schneidende Ebenen)
- keine Lösung (Bsp.: 2 parallele Geraden)

Falls alle Absolutglieder $c_i = 0 \ \forall$ i (homogenes lineares Gls.) so besitzt das System
- genau eine Lösung (nämlich triviale Lösung $x_i = 0$) oder
- unendlich viele Lösungen.

<u>Allg.</u>

<u>Def.</u> : Das aus m linearen Gleichungen mit n Unbekannten x_1, x_2, x_n bestehende System

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots a_{1n}x_n = c_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots a_{2n}x_n = c_2 \\
&\ldots \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots a_{mn}x_n = c_m
\end{aligned}
$$

heißt ein <u>lineares Gleichungssystem.</u>

$a_{in} \in R$ sind die Koeffizienten, c_i die Absolutglieder.
Falls mindestens ein $c_i \neq 0$ dann heißt das Gls. inhomogen
Falls alle $c_i = 0 \;\; i = 1,2,\ldots n$ heißt das Gls. homogen.

<u>Gauß´sche Algorithmus</u> (Eliminationsverfahren)

Rechenschema für quadratisches Gls. (d.h. $m = n$)

$$
\begin{array}{c|cccc|}
 & x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\
\hline
(I) & a_{11} & a_{12} & a_{1n} & c_1 \\
(II) & a_{21} & a_{22} & a_{2n} & c_2 \\
 & \vdots & & & \\
(N) & a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} & c_m \\
\hline
\end{array}
\quad \text{(Gls.)}
$$

Da Umformungen lediglich die Koeffizienten und die Absolutglieder betreffen braucht man die Unbekannten nicht zu notieren.
Erster Schritt:

$$
\begin{array}{lcccccc}
 & I & a_{11} & a_{12} & \ldots & \ldots\; a_{1n} & c_1 \\
II \;\; -\dfrac{a_{21}}{a_{11}} I \rightarrow & II' & 0 & a'_{22} & a'_{23} & \ldots\; a'_{2n} & c'_2 \\
\ldots\ldots & & & & & & \\
(N) -\dfrac{a_{m1}}{a_{11}} I \rightarrow & M' & 0 & a'_{m2} & a'_{m3} & \ldots\; a'_{mn} & c'_m
\end{array}
$$

Analog GLS´´ durch Subtraktion von $\dfrac{a'_{i2}}{a'_{22}} II'$

Falls $a_{ii} = 0$ dann vertauscht man Zeilen, so daß $a_{ii} \neq 0$.

Bsp.:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

	1	1	-2	0	I
	1	-1	-2	0	II
-1/1I	-1	-1	2	0	+
	2	3	-4	0	III
-2/1I	-2	-2	4	0	
	0	-2	0	0	II’
	0	1	0	0	III’
-1/-2 II’	0	1	0	0	
	0	0	0	0	III’’

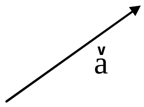
III’’	0z = 0	=>	z = a $\in$ **R** beliebig aber fest		
II’	-2y + 0Z = 0	=>	-2y = 0	=>	y = 0
I	1x + 1*0 - 2a = 0	=>	x - 2a = 0	=>	x = 2a

d.h. Lösung ist x = 2a , y = 0, z = a für jedes beliebige a $\in$ **R** (unendl. viele Lösungen)

2.2. Vektoralgebra

2.2.1 Grundlagen

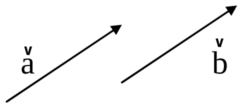
Def.: Vektoren sind Größen, die durch Angabe der Maßzahl (Betrag) und Richtung vollständig beschrieben sind.
Bsp.: Kraft, Geschwindigkeit
Darstellung:



Maßzahl $\hat{=} |\vec{a}|$

Richtung $\hat{=}$ Orientierung

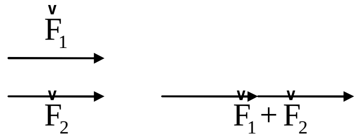
Def.: Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind gleich $\vec{a} = \vec{b}$, falls sie in Betrag und Richtung übereinstimmen (freie Vektoren)



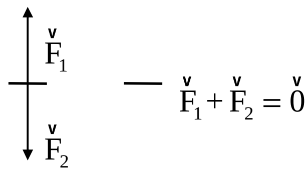
Addition von Vektoren

Bsp.: Kräfte $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ gegeben $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = ?$

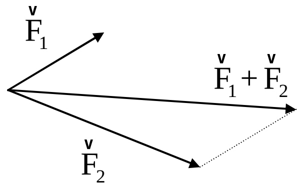
a)



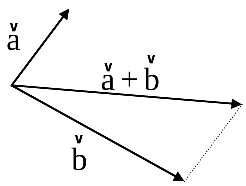
b)



c)

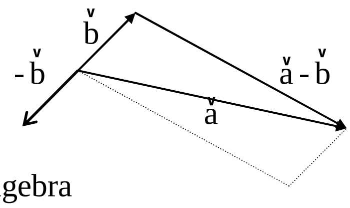


Die Summe der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ergibt sich als die Diagonale des von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogrammes (gleicher Ursprung)



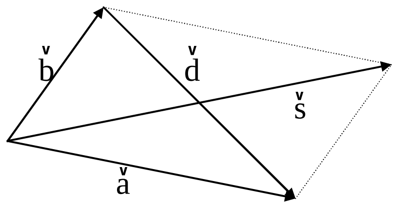
Subtraktion von Vektoren

$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$



Parallelogrammregel

Summenvektor $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$ und Differenzvektor $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$ lassen sich als Diagonalen des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms konstruieren



Multiplikation mit einem Skalar

Für $\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a} \qquad \lambda \in R$
gilt $\vec{b}$ ist parallel zu $\vec{a}$ bzw. zu $-\vec{a}$
sowie $|\vec{b}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$

Bsp.: a) $\longrightarrow$

$\vec{a}$ (parallel)

$\longrightarrow$

$\vec{b} = 2 \cdot \vec{a}$ $|\vec{b}| = 2 \cdot |\vec{a}|$

b) $\longrightarrow$

$\vec{a}$ (antiparallel)

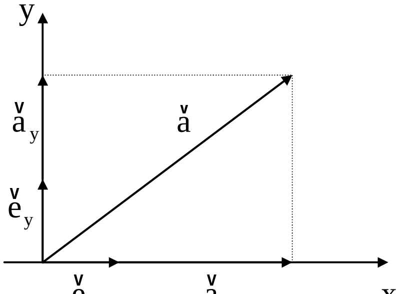
$\longleftarrow$

$\vec{b} = -2 \cdot \vec{a}$ $|\vec{b}| = |-2| \cdot |\vec{a}|$

Ein Einheitsvektor $\vec{e}$ ist ein Vektor mit $|\vec{e}| = 1$

2.2.2. Darstellung von Vektoren mit Basisvektoren

Bsp.:
Basisvektoren in der Ebene : rechtwinkliges Koordinatensystem mit den Einheitsvektoren $\vec{e}_x$ und $\vec{e}_y$ ($\vec{e}_x \perp \vec{e}_y$ und $|\vec{e}_x| = |\vec{e}_y| = 1$) .

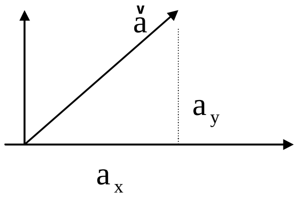


Ziel : Darstellung eines bel. Vektors $\vec{a}$ durch Addition von „Vielfachen“ der Einheitsvektoren

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y \qquad \text{(Summenregel)}$$
$$= a_x \cdot \vec{e}_x + a_y \cdot \vec{e}_y \qquad a_x, a_y \in R$$
$$= \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \qquad \text{bei fester Basis } \vec{e}_x, \vec{e}_y$$

Bei fester Basis $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ ist der Vektor $\vec{a}$ durch die Angabe des Spaltenvektors $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ eindeutig bestimmt.

<u>Betrag eines Vektors</u>



$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \qquad \text{(in der Ebene)}$$

bzw. $|\vec{a}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$

Bsp.: $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ \sqrt{11} \end{pmatrix}$

$$|\vec{a}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} a_i^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{(-3)^2 + 4^2 + \sqrt{11}^2}$$
$$= \sqrt{9 + 16 + 11} = \sqrt{36} = 6$$

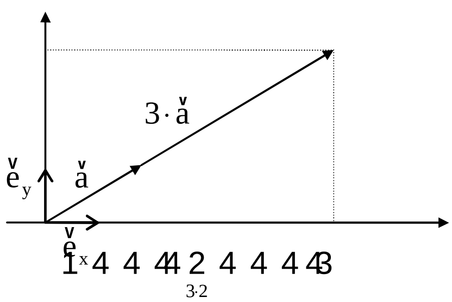
<u>Vektoroperationen</u>

<u>Multiplikation</u> mit einem Skalar $\lambda \in R$

Bsp.: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda = 3$

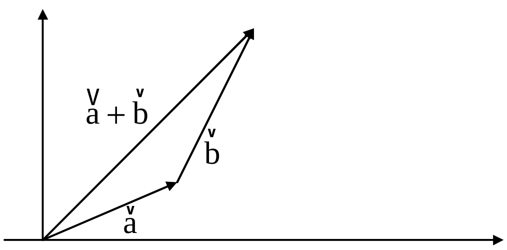
$$\lambda \cdot \vec{a} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 1 \end{pmatrix}$$



$$\text{Allg.:}\quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \qquad \lambda \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_1 \\ \lambda \cdot a_2 \\ \vdots \\ \lambda \cdot a_n \end{pmatrix}$$

<u>Addition</u>

Bsp.: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$



$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1 \\ 1+2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Allg.:}\quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \;;\quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \qquad \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$

<u>Subtraktion</u>

In Analogie zur Addition erhält man

$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ \vdots \\ a_n - b_n \end{pmatrix}$$

<u>Gleichheit von Vektoren</u>

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ \vdots \\ a_n = b_n \end{cases}$$

d.h. zwei Vektoren sind gleich, wenn sie in allen Komponenten übereinstimmen.

<u>Beispiele</u>

(1) 3 Kräfte in einer Ebene wirken auf einen Massepunkt

$$\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} -2N \\ 6N \end{pmatrix};\ \vec{F}_2 = \begin{pmatrix} 3N \\ -4N \end{pmatrix};\ \vec{F}_3 = \begin{pmatrix} 4N \\ 1N \end{pmatrix}$$

Welche resultierende Kraft kann sie ersetzen ?

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \begin{pmatrix} -2N \\ 6N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3N \\ -4N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4N \\ 1N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2N + 3N + 4N \\ 6N - 4N + 1N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5N \\ 3N \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}_{res} = -\vec{F} = \begin{pmatrix} -5N \\ -3N \end{pmatrix}$$

(2) Gegeben

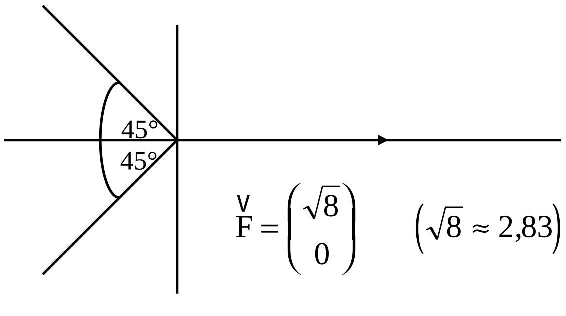
$$\vec{a} = 2\vec{e}_x - 3\vec{e}_y + 1\vec{e}_z$$
$$\vec{b} = 3\vec{e}_x + 1\vec{e}_y + 2\vec{e}_z$$
$$\vec{c} = -\vec{e}_x + 2\vec{e}_y - 1\vec{e}_z$$

$$\vec{s} = \vec{a} + 2 \cdot \vec{b} - \vec{c} \qquad |\vec{s}| = ?$$

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+6+1 \\ -3+2-2 \\ 1+4+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{s}| = \sqrt{9^2 + (-3)^2 + 6^2} = \sqrt{81+9+36} = \sqrt{126}$$

(3) Gegeben ist die Kraft $\vec{F}$ sowie die Richtungen der beiden Kräfte, die die Kraft $\vec{F}$ kompensieren sollen.
Gesucht ist $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ mit $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -\vec{F}$.



$$\vec{F} = \begin{pmatrix} \sqrt{8} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \left(\sqrt{8} \approx 2{,}83\right)$$

Einheitsvektoren in Kraftrichtung

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{oder} \qquad \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} -\cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix},\ \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} -\cos\alpha \\ -\sin\alpha \end{pmatrix}$$

Ansatz

$\vec{F}_1 = a_1 \cdot \vec{e}_1 \qquad \vec{F}_2 = a_2 \cdot \vec{e}_2$ Gesucht a_1, a_2 sowie $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$

dargestellt durch $\begin{pmatrix} e_x \\ e_y \end{pmatrix}$

mit $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -\vec{F}$

$$a_1 \cdot \vec{e}_1 + a_2 \cdot \vec{e}_2 = -\vec{F}$$

$$\frac{a_1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{a_2}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$$

GLS.: (I) $-\frac{1}{\sqrt{2}} a_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} a_2 = -\sqrt{8}$

(II) $\frac{1}{\sqrt{2}} a_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} a_2 = 0$

(I) − (II) $-\frac{2}{\sqrt{2}} a_1 = -\sqrt{8}$

$$-\sqrt{2}\, a_1 = -\sqrt{8}$$

$$a_1 = \frac{-\sqrt{8}}{-\sqrt{2}}$$

$$\underline{\underline{a_1 = 2}}$$

Einsetzen in (I) $-\frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} a_2 = -\sqrt{8} \quad \Big| \cdot \left(-\sqrt{2}\right)$

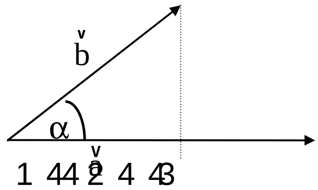
$$2 + a_2 = 4$$

$$\underline{\underline{a_2 = 2}}$$

2.2.3 Skalarprodukt

Def.: Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ (Produkt von Vektoren mit Skalar als Ergebnis)

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha \qquad (0° \le \alpha \le 180°)$



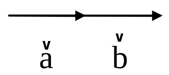
$|\vec{b}| \cdot \cos\alpha$ (d.h. Komponente von $\vec{b}$ in Richtung von $\vec{a}$)

Anm.: $\vec{a} \cdot \vec{b} \in R$ ist ein Skalar (kein Vektor)

Statt $\vec{a}\cdot\vec{b}$ schreibt man auch $(\vec{a},\vec{b})$

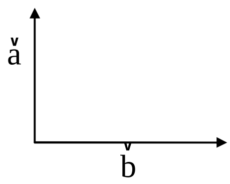
$(\vec{a},\vec{b})$ heißt auch inneres Produkt der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$. “$(\vec{a},\vec{b})$ ist ein Produkt zweier Größen, bei denen die Richtung der Größen berücksichtigt werden muß“.

<u>Bsp.:</u> **(1)** $\alpha = 0$



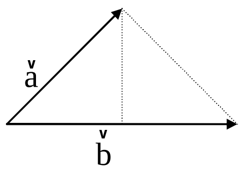
$$(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$$

(2) $\alpha = 90°$



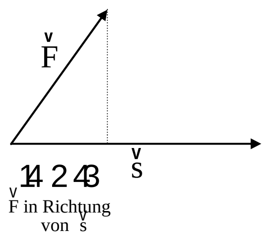
$$(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\underbrace{\cos 90°}_{=0} = 0$$

(3)



$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 2$$
$$1\cdot 2 = 2$$

(4) Eine Kraft $\vec{F}$ wirkt längs des Weges $\vec{s}$



$W = \vec{F}\cdot\vec{s}$ (W = Arbeit)

d.h. lediglich die Komponente der Kraft in Richtung des Weges $\vec{s}$ trägt zur Arbeit bei.

<u>Rechengesetze</u>

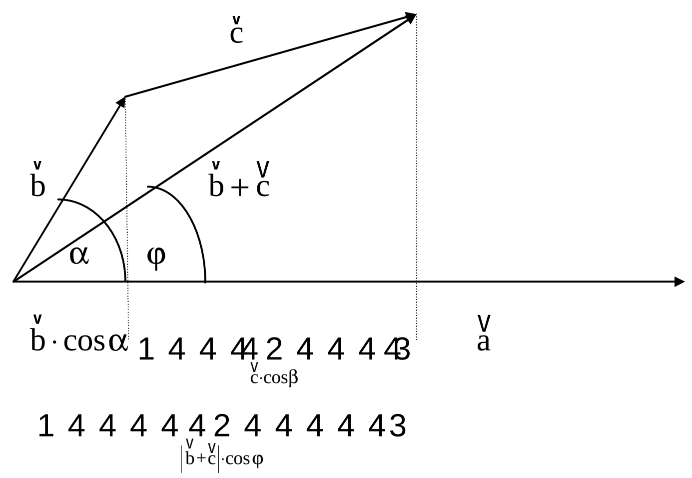
1. Vertauschungsgesetz (Kommutativgesetz)

$$(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha = |\vec{b}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos\alpha = (\vec{b},\vec{a})$$

$\uparrow$ Kom. in **R**

2. Distributivgesetz

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$$



$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c} &= |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha+|\vec{a}|\cdot|\vec{c}|\cdot\cos\beta\\ &= |\vec{a}|\cdot\left(|\vec{b}|\cdot\cos\alpha+|\vec{c}|\cdot\cos\beta\right)\\ &= |\vec{a}|\cdot\left(|\vec{b}+\vec{c}|\cdot\cos\varphi\right)=\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right)\end{aligned}$$

Es gilt : $|\vec{b}|\cdot\cos\alpha+|\vec{c}|\cdot\cos\beta=|\vec{b}+\vec{c}|\cdot\cos\varphi$

3. $\vec{a}\cdot\vec{a}=a^2$ (da $\cos(0)=1$)

4. Multiplikation mit einem Skalar $\lambda\in R$

$\lambda\cdot\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)=\left(\lambda\cdot\vec{a}\right)\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\left(\lambda\cdot\vec{b}\right)$

Aber.: i.allg. $\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\neq\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)$

<u>Bsp.:</u> sei $\vec{b}$ orthogonal $\vec{c}$

$\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\vec{c}$

aber $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)=\vec{a}\cdot 0=0$

<u>Orthogonalität von Vektoren</u>

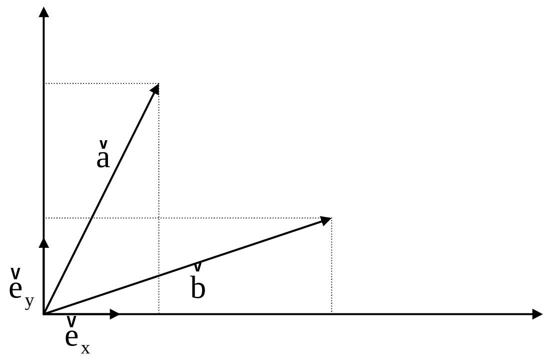
Sei $\vec{a}\neq\vec{0}$ und $\vec{b}\neq 0$

$\vec{a}$ und $\vec{b}$ stehen aufeinander <u>senkrecht</u>, falls $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

Man sagt : $\vec{a}$ ist orthogonal zu $\vec{b}$ (Schreibweise $\vec{a}\perp\vec{b}$)

Berechnung des Skalarproduktes in Vektorkoordinaten

Bsp.: Basisvektoren $\vec{e}_x$ und $\vec{e}_y$ wobei $\vec{e}_x \perp \vec{e}_y$



$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$$

$$\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) = \left(a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y\right) \cdot \left(b_x \vec{e}_x + b_y \vec{e}_y\right) \qquad (*)$$

mit $\vec{a} \cdot \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ (Distributivgesetz)

erhalten wir

$$\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) = \underline{\left(a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y\right) \cdot b_x \vec{e}_x} + \underline{\left(a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y\right) \cdot b_y \vec{e}_y}$$

$$\underbrace{=}_{\text{Kommutativ}} b_x \vec{e}_x \cdot \left(a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y\right) + b_y \vec{e}_y \cdot \left(a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y\right)$$

$$\underbrace{=}_{\text{Distributiv}} b_x a_x \vec{e}_x \cdot \vec{e}_x + b_x a_y \vec{e}_x \cdot \vec{e}_y + b_y a_x \vec{e}_y \cdot \vec{e}_x + b_y a_y \vec{e}_y \cdot \vec{e}_y$$

$$= b_x a_x \cdot 1 + b_x a_y \cdot 0 + b_y a_x \cdot 0 + b_y a_y$$

$$= b_x a_x + b_y a_y \qquad \text{da } \vec{e}_x \cdot \vec{e}_x = 1$$

$$\text{und } \vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = 0 \qquad \left(\vec{e}_x \perp \vec{e}_y\right)$$

Satz

Das Skalarprodukt der Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, wobei die a_i und b_i die Komponenten zu den Basisvektoren e_i sind für die gilt

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(d.h. die Basisvektoren bilden ein Orthogonalsystem) wird wie folgt berechnet

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \ldots a_n \cdot b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

<u>Bsp.:</u> $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) = 2$$

<u>Berechnung des Winkels zwischen zwei Vektoren</u>

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha \quad (\vec{a} \neq \vec{0} \wedge \vec{b} \neq \vec{0}) \quad 0 \leq \alpha \leq 180°$$

$$\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \cos\alpha \qquad \text{mit } x = \cos\alpha$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \arccos x$$

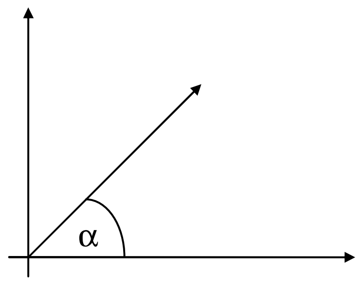
$$\Leftrightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right)$$

<u>Satz</u>
Der Winkel α den die Vektoren $\vec{a} \neq \vec{0}$ und $\vec{b} \neq \vec{0}$ einschließen wird wie folgt errechnet

$$\boxed{\alpha = \arccos\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right)}$$

<u>Bsp.:</u> Welchen Winkel bilden der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit der x-Achse?

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

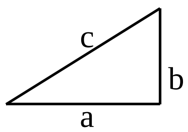


$$\alpha = \arccos\left(\frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{8} \cdot 1}\right)$$

$$= \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{8}}\right) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

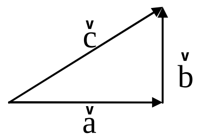
$$= 45°$$

<u>Satz des Pythagoras</u>
In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der beiden Kathetenquadrate gleich dem Quadrat der Hypothenuse.



$$a^2 + b^2 = c^2$$

<u>Beweis :</u>

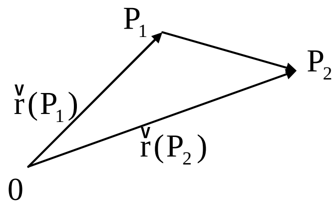


es gilt $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

$$
\begin{aligned}
c^2 = \vec{c} \cdot \vec{c} &= (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) \\
&= (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{a} + (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b} \\
&= \vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{b} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) \\
&= \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} \\
&= \vec{a} \cdot \vec{a} + 0 + 0 + \vec{b} \cdot \vec{b} \quad \text{da } \vec{a} \perp \vec{b} \\
&= a^2 + b^2
\end{aligned}
$$

Bsp.: Arbeit einer Kraft

Die Kraft $\vec{F} = \begin{pmatrix} 1N \\ 2N \\ -3N \end{pmatrix}$ verschiebt einen Massepunkt von $P_1 = (1m;-2m;4m)$ nach $P_2 = (2m;3m;1m)$. Welche Arbeit wird verrichtet? $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$



$$
\vec{s} = \overrightarrow{P_1 P_2} = \vec{r}(P_2) - \vec{r}(P_1) = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} 2m - 1m \\ 3m - (-2m) \\ 1m - 4m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1m \\ 5m \\ -3m \end{pmatrix}
$$

$$
W = \vec{F} \cdot \vec{s} = \begin{pmatrix} 1N \\ 2N \\ -3N \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1m \\ 5m \\ -3m \end{pmatrix} = 1Nm + 10Nm + 9Nm = 20Nm
$$