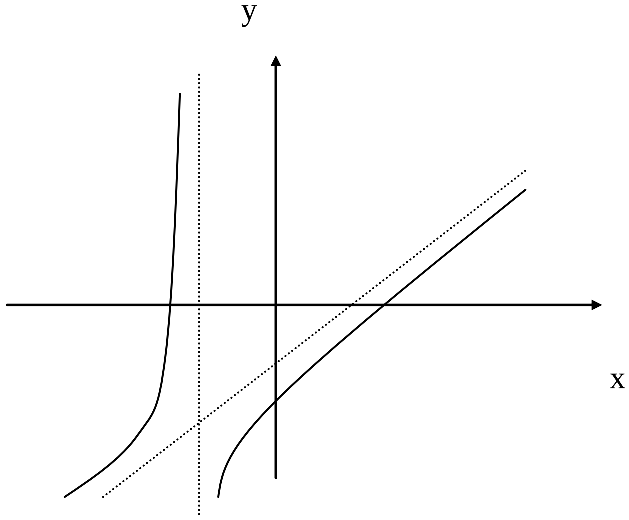


Verhalten für $x \to \pm\infty$?
Polynomdivision g(x) : h(x)

$$(x^2 - 1) : (x + 0{,}5) = x - 0{,}5 + \frac{-0{,}75}{x + 0{,}5}$$

$$\underline{-(x^2 + 0{,}5x)}$$

$$-0{,}5x - 1$$

$$\underline{-(-0{,}5x - 0{,}25)}$$

$$-0{,}75$$

d.h. $f(x) = \underbrace{x - 0{,}5}_{p(x)} + \underbrace{\frac{-0{,}75}{x + 0{,}5}}_{r(x)}$

r(x) ist echt gebrochenrational, d.h. $r(x) \to 0 \quad (x \to \pm\infty)$
Somit $f(x) \to p(x)$ für $x \to \pm\infty$

Zusammenfassung : Asymptote für $x \to \pm\infty$

Jede echt gebrochenrationale Funktion hat für $x \to \pm\infty$ die horizontale Asymptote y=0 (x-Achse).
Zur Bestimmung der Asymptote einer unecht gebrochenrationalen Funktion f(x) wird diese Funktion durch Polynomdivision g(x) **:** h(x) als Summe einer ganzrationalen und einer echt gebrochenrationalen Funktion dargestellt,

d.h. $f(x) = p(x) + r(x)$ mit $r(x) \to 0 \ (x \to \pm\infty)$
Die Funktion nähert sich dann der Funktion p(x) (Asymptote) für $x \to \pm\infty$.

Bsp.:

$$f(x) = \frac{3x^3 - 36x + 48}{x^3 + 3x^2 - 6x - 8}$$

Linearfaktorzerlegung :

$$f(x) = \frac{3(x-2)^2 \cdot (x+4)}{(x+1)\cdot(x-2)\cdot x+4)}$$

$$g(x) = 0 \qquad x_1 = 2 \quad \text{doppelt}$$
$$x_2 = -4$$
$$h(x) = 0 \qquad x_1 = -1$$
$$x_2 = 2$$
$$x_3 = -4$$

$$f(x) = \frac{3\cdot(x-2)\cdot(x-2)\cdot(x+4)}{(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x+4)} \qquad \textit{für} \quad x \in \mathrm{R}\big|\{-1;2;-4\}$$

$$\textit{Polstelle} \ : x = -1$$
$$\textit{stetig behebbar} : x = 2 \quad \text{keine} \quad \text{Nullstelle!}$$

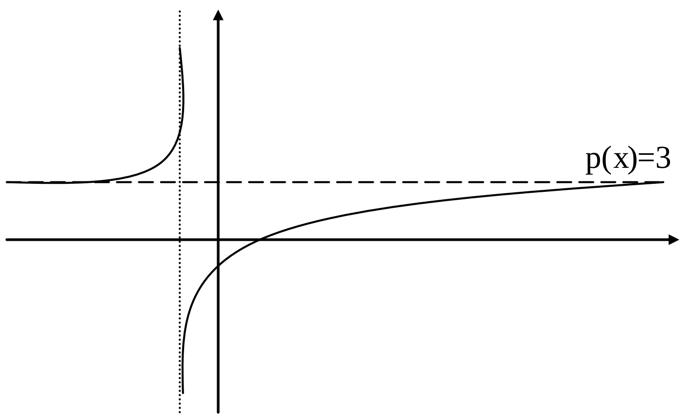
Verhalten für $x \to \pm\infty$

f(x) ist unecht gebrochenrational, d.h. Polynomdivision

$$g(x) = 3x - 6 \qquad h(x) = x + 1$$

$$(3x-6):(x+1) = 3 - \frac{9}{x+1}$$
$$\underline{-(3x+3)}$$
$$-9$$

$$\text{d.h.} \quad f(x) = \underbrace{3}_{p(x)} - \underbrace{\frac{9}{x+1}}_{r(x)\to 0 \quad (x\to\pm\infty)}$$



3.4. Exponentialfunktion, Logarithmusfunktion

3.4.1. Grundbegriffe

Potenz a^n

a : Basiszahl (bzw. Basis)

n : Hochzahl (Exponent)

Potenzgesetze :

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

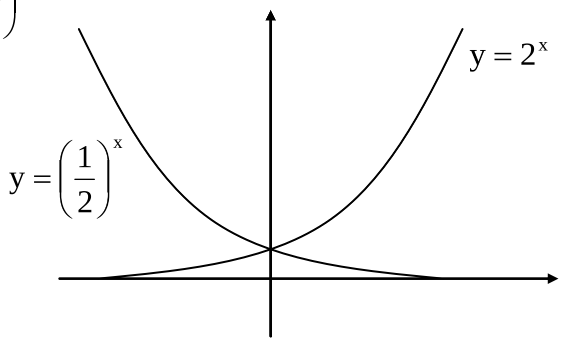
Def.:

Funktionen vom Typ $y(x) = a^x$ mit $a > 0$ heißen Exponentialfunktionen.

Bsp.:

$$y(x) = 2^x$$

$$y(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$



Eigenschaften

Exponentialfunktionen

- sind definiert für $-\infty < x < +\infty$
- sind stetig in R
- haben den Wertebereich $0 < y < +\infty$
- sind für $0 < a < 1$ streng monoton fallend und haben Asymptote $y=0$ ($x \to +\infty$)
- sind für $a>1$ streng monoton wachsend und haben Asymptote $y=0$ (($x \to -\infty$)

Bsp. für Exponentialfunktionen

$$f(x) = 2^x$$

$$f(x) = \left(\frac{1}{10}\right)^x$$

$$f(x) = (1000)^x$$

$$f(x) = (\underbrace{2{,}718281...}_{\text{Eulersche Zahl e}})^x$$

3.4.2. Die Exponentialfunktion y=e^x

Bsp.: Radioaktiver Zerfall
Die Anzahl der pro Zeiteinheit zerfallenden Atome ist proportional zur Anzahl der vorhandenen Atome
d.h. Sei n(t) : Anzahl der Atome zur Zeit t, dann

$$\frac{d\,n(t)}{d(t)} = c \cdot n(t)$$

c ist Proportionalitätskonstante
In Worten : Die Ableitung der Funktion n(t) ist proportional zur Funktion n(t)

Was ist n(t) = ?
Lösung:

$$n(t) = n_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} \quad (t \geq 0)$$

mit n_0 : Anzahl der zu Beginn vorhandenen Atomkerne
und $\lambda > 0$: Zerfallskonstante

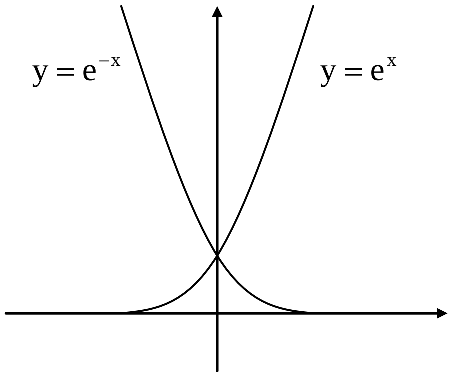
e =2,718281... ist die Eulersche Zahl

Die Funktion $y = e^x$ heißt e - Funktion
Die Eulersche Zahl ist wie folgt definiert :

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2{,}718281\ldots$$

Die e-Funktion ermöglicht die formale Beschreibung vieler praktische Anwendungen. Beispiele sind u.a.
- radioakiver Zerfall
- Entladung eines Kondensators
- Zuwachs biologischer Populationen
- Barometrische Höhenformel

Funktionsgraph:

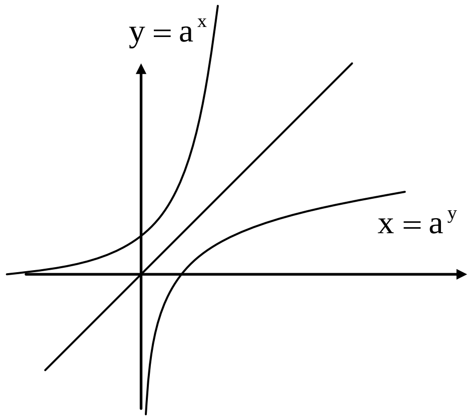


Der Funktionsgraph von $y = a^{-x}$ entsteht durch Spiegelung des Graphen $y = a^x$ an der y - Achse.

3.4.3. Logarithmusfunktion

Gesucht :

Umkehrfunktion von $y = a^x$



Zu jedem $y_0 \in W$ existiert genau ein $x_0 \in D$ mit $y_0 = a^{x_0}$

d.h. die Umkehrfunktion von $y = a^x$ existiert

Umkehrfunktion : $x = a^y$ $\quad y = ?$

y :"Wie oft muß man a mit sich selbst multiplizieren, damit man x erhält"

Bsp.: Sei a=10 (Basis)

$$x = 10^y$$
$$x = 1000 \Rightarrow y = 3 \quad \text{da } 10^3 = 1000$$
$$x = 10000 \Rightarrow y = 4 \quad \text{da } 10^4 = 10000$$
$$x = \frac{1}{100} \Rightarrow y = -2 \quad \text{da } 10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}$$

Def.:

Die Logarithmusfunktion $y = \log_a x$ zur Basis a ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $y = a^x$ $(a > 0)$

Bsp.:

$$\log_{10} 1000 = 3 \quad \text{da} \quad 10^3 = 1000$$
$$\log_2 16 = 4 \quad \text{da} \quad 2^4 = 16$$
$$\log_3 81 = 4 \quad \text{da} \quad 3^4 = 81$$

<u>Rechenregeln für Logarithmen</u>

(1)

$$\log_a(u\cdot v)=\log_a u+\log_a v$$

$$\text{Bew.}: y=\log_a x \Leftrightarrow x=a^y$$

$$a^{\log_a(u\cdot v)}=u\cdot v=a^{\log_a u}\cdot a^{\log_a v}=a^{\log_a u+\log_a v}$$

$$\log_a(u\cdot v)=\log_a(a^{\log_a u\cdot v})=\log_a(a^{\log_a u+\log_a v})$$

$$=\log_a u+\log_a v$$

(2)

$$\log_a\left(\frac{u}{v}\right)=\log_a u-\log_a v$$

(3)

$$\log_a u^n=n\cdot\log_a u$$

Beweis von (2) und (3) entspr. (1) unter Verwendung der Potenzgesetze.

<u>Spezielle Basen</u>

Natürliche Logarithmus Basis:e (Eulersche Zahl)

$$\log_e x\equiv\ln x$$

Zehnerlogarithmus Basis:10

$$\log_{10} x\equiv\lg x$$

Bsp.:

$$\lg 100=2$$

$$\lg 10^{-0,17}=-0,17$$

$$\lg 0,5=-0,301\ldots$$

$$\ln e=1$$

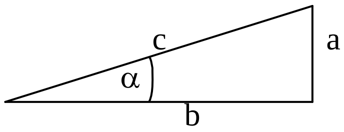
$$\ln 100=4,605\ldots$$

$$\ln e^{3,14}=3,14$$

3.5. Trigonometrische Funktionen

3.5.1. Grunglagen

Definition der Winkelfunktion für $0° \leq \alpha < 90°$ im rechtwinkligen Dreieck.



a,b:Katheten
c:Hypothenuse

$$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}} = \frac{a}{c}$$

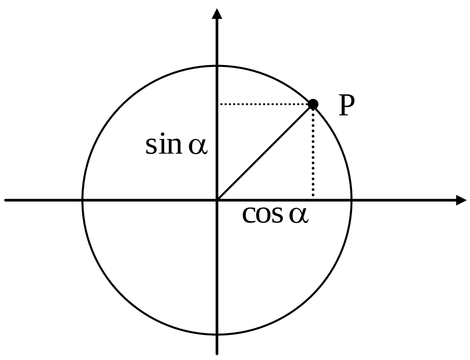
$$\cos\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}} = \frac{b}{c}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\cot\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}} = \frac{b}{a} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\tan\alpha}$$

Darstellung im Einheitskreis

Einheitkreis: Kreis mit r = 1
Drehsinn: Gegen Uhrzeiger



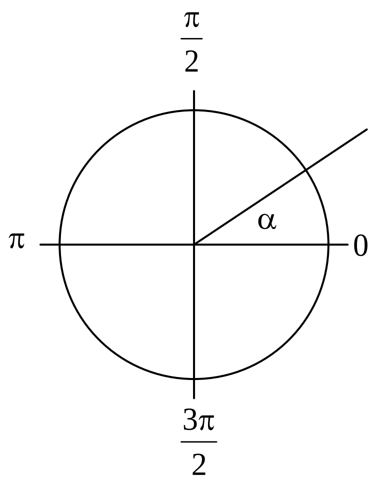
Sei α beliebiger Winkel dann ist $\sin\alpha$=Ordinate von P, wobei P der zu α gehörende Punkt auf dem Einheitskreis ist.

$$\cos\alpha = \text{Abszisse von P}$$

$$\tan\alpha = \text{Ordinate von } \overline{P} \text{ da } \frac{\tan\alpha}{\underbrace{1}_{\text{Radius}}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

3.5.2. Sinus- und Kosinusfunktion

Das Bogenmaß x eines Winkels α ist die Länge des Bogens entlang dem Einhetskreis.



Bogenmaß

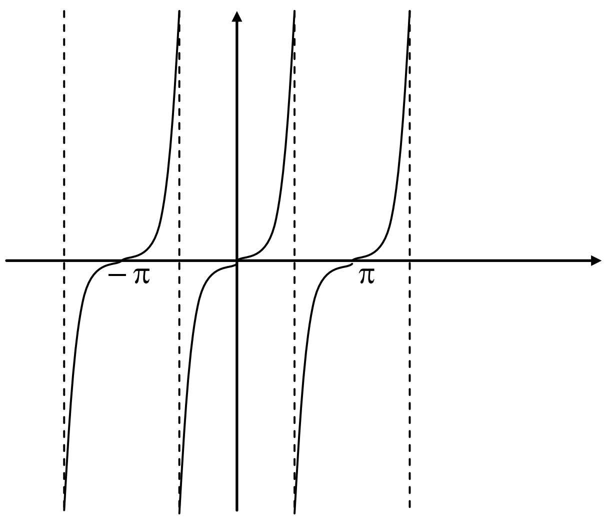
Umfang des Kreises $= 2\pi r \quad r = 1$

Sinus und Kosinus sind periodische Funktionen (Periode 2π)

$$\sin(-x) = -\sin(x)$$
$$\cos(-x) = \cos(x)$$
$$\sin(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$
$$\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$\text{Phytagoras}: \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$
$$(\text{Schreibweise}: \sin^2 x \mathrel{\hat{=}} (\sin x)^2)$$

3.5.3. Tangens und Kotangens

y=tan x

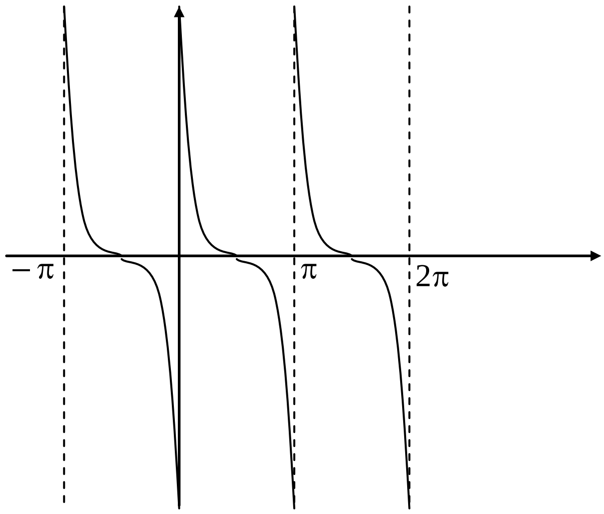


Tangensfunktion :

- Periode π
- ist nicht definiert für $x = (2k+1)\dfrac{\pi}{2} \quad k \in Z$

  an diesen Stellen liegt eine vertikale Asymptote vor

y=cot x



Kotangens:

- Periode π
- ist nicht definiert für $x = k\pi \;\; k \in Z$

  an diesen Stellen liegt eine vertikale Asymptote vor.

3.5.4. Additionstheoreme

$$\boxed{\begin{array}{ll} I. & \sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta \\ II & \cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta \\ III & \tan(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha \cdot \tan\beta} \end{array}}$$

Aus I-III ergeben sich :

$$\boxed{\begin{array}{l} \sin(2x) = 2 \cdot \sin x \cos x \\ \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x \\ \sin^2 x = \dfrac{1}{2}(1 - \cos(2x)) \\ \cos^2 x = \dfrac{1}{2}(1 + \cos(2x)) \end{array}}$$

3.5.5. Arkusfunktionen

Die Trigonometrischen Funktionen sin x, cos x, tan x und cot x sind nicht eineindeutig, so daß zunächst keine Umkehrfunktion definiert werden kann.
⇒Beschränkung des Definitionsbereichs erforderlich.

Def.: Arkusfunktionen

Funktion	Def.-Bereich	Monotonie	Umkehrfkt.
$y = \sin x$	$x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	str.m.w.	$y = \arcsin x$
$y = \cos x$	$x \in [0, \pi]$	str.m.f.	$y = \arccos x$
$y = \tan x$	$x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	str.m.w.	$y = \arctan x$
$y = \cot x$	$x \in (0, \pi)$	str.m.f.	$y = \operatorname{arc\,cot} x$

Bsp.:

$$\arcsin -0{,}5 = -\frac{\pi}{2} \mathrel{\hat{=}} -30°$$

$$\arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4} \mathrel{\hat{=}} 45°$$

$$\arccos 0{,}5 = \frac{\pi}{3} \mathrel{\hat{=}} 60°$$

$$\arctan(-10) = -1{,}471$$

$$\operatorname{arc\,cot} 2 = ?$$

$$\text{Verwende: } \operatorname{arc\,cot} x = \frac{\pi}{2} - \arctan x \quad \text{(x in Bogenmaß)}$$

$$\operatorname{arccot} 2 = \frac{\pi}{2} - \arctan 2 \approx 0{,}464$$

3.5.6. Trigonometrische Gleichungen

Gleichungen, in denen die Unbekannte x in den Argumenten trigonometrischer Funktionen auftritt heißen trigonometrische Gleichungen.
Es gibt <u>kein</u> allg. Lösungsverfahren für diese Gleichungen.
Bsp.:

$$\sin(2x) - \cos x = 0 \qquad (*)$$

$$\text{Verwende: } \sin(2x) = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$$

$$(*) \Leftrightarrow 2 \cdot \sin x \cdot \cos x - \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x \cdot (2 \sin x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1.\ \cos x = 0 \quad \text{oder} \\ 2.\ 2 \cdot (\sin x) - 1 = 0 \end{cases}$$

Lösung von 1. d.h. $\cos x = 0$ $x_{1k} = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in Z)$

Lösung von 2. d.h. $2 \cdot (\sin x) - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin x = 1 \Leftrightarrow \sin x = 0{,}5$

$\arcsin 0{,}5 = \frac{\pi}{6} \mathrel{\hat{=}} 30° \quad$ für $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Symmetrie: $x_2 = \pi - \frac{\pi}{6}\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

Periode : $x_{2k} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \quad (k \in Z)$

$x_{3k} = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \quad (k \in Z)$

$L = \{x \mid x = x_{1k} \vee x = x_{2k} \vee x = x_{3k} \quad k \in Z\}$

3.5.7. Anwendungsbeispiel : Periodische Schwingungen

(1) Thermische Schwingung

$y(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$

A = Amplitude

$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ Winkelgeschwindigkeit

φ = Phasenverschiebung

Bsp.: Masse an einer Feder

(2) Überlagerung von Schwingungen gleicher Frequenz

$$\left.\begin{array}{l} y_1(t) = A \cdot \cos \omega t \\ y_2(t) = B \cdot \sin \omega t \end{array}\right\} \quad y(t) = y_1(t) + y_2(t) = ?$$

$y(t) = A \cdot \cos \omega t + B \cdot \sin \omega t$

Additionstheorem $\cos(x - \varphi) = \cos\varphi \cdot \cos x + \sin\varphi \cdot \sin x$

Setze $x = \omega t \Rightarrow \cos(\omega t - \varphi) = \cos\varphi \cdot \cos \omega t + \sin\varphi \cdot \sin \omega t$

$\Rightarrow A = C \cdot \cos\varphi \Leftrightarrow \cos\varphi = \frac{A}{C} \quad \sin\varphi = \frac{B}{C}$

$\Rightarrow C \cdot \cos(\omega t - \varphi) = \underbrace{C \cdot \cos\varphi}_{=A} \cdot \cos \omega t + \underbrace{C \cdot \sin\varphi}_{=B} \cdot \sin \omega t$

$$\Rightarrow y(t) = y_1(t) + y_2(t) = A \cdot \cos \omega t + B \cdot \sin \omega t$$
$$= C \cdot \cos(\omega t - \varphi)$$

mit $C = \sqrt{A^2 + B^2}$

und $\tan \varphi = \dfrac{B}{A} \quad \varphi = \arctan \dfrac{B}{A}$

d.h. Überlagerung der gleichfrequenten Schwingungen $y_1(t)$ und $y_2(t)$ führt zu einer Schwingung gleicher Frequenz mit Phasenverschiebung φ.