6.2.2 Partielle Integration

Bsp.:

$$\int x \cdot e^x dx$$

$\Rightarrow$ Substitution ist nicht möglich

Verwende Produktregel der Differentialrechnung zur Herleitung

$$\frac{d}{dx}[u(x) \cdot v(x)] = u'(x) \cdot v(x) + v'(x) \cdot u(x) \qquad / - (u'(x)v(x))$$

$$\frac{d}{dx}[u(x) \cdot v(x)] - u'(x) \cdot v(x) = v'(x) \cdot u(x)$$

Integration:

$$\int \frac{d}{dx}(u(x) \cdot v(x))dx - \int u'(x) \cdot v(x)dx = \int v'(x) \cdot u(x)dx$$

$$= u(x) \cdot v(x)$$

Somit:

$$\underline{u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)dx = \int v'(x) \cdot u(x)dx}$$

Bsp.(s.o.):

$$\int x \cdot e^x dx$$

Wähle $x = u(x), e^x = v'(x)$ *dann* $v(x) = e^x$:

$$\Rightarrow \int x \cdot e^x dx = x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x dx$$

$$= x \cdot e^x - e^x + c$$

d.h. $\int x \cdot e^x dx = x \cdot e^x - e^x + c$

Zusammenfassung :

Gesucht ist $\int f(x)\, dx$, wobei $f(x)$ durch die Faktoren $u(x)$ und $v'(x)$ beschreibbar ist.
Falls die Stammfunktion $v(x)$ von $v'(x)$ bekannt ist, kann das Integral wie folgt *umgeformt* werden :

$$\int f(x)\, dx = \int v'(x) \cdot u(x)dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)dx$$

Falls $\int u'(x) \cdot v(x)dx$ lösbar, dann ist $\int f(x)dx$ berechnet.

$$\textit{Merkregel}: \quad \underline{\int uv' = uv - \int u'v}$$

Bsp.:

(1) $$\int 1 \cdot \ln x dx = x \ln x - \int \frac{1}{x} x dx = x \cdot \ln x - x + c$$

$$= x(\ln x - 1) + c$$

$$v' = 1 \qquad v = x$$

$$u = \ln x \qquad u' = \frac{1}{x}$$

(2) $$\int x \cdot \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{2 \cdot 2} + c$$

$$v' = x \qquad v = \frac{x^2}{2}$$

$$u = \ln x \qquad u' = \frac{1}{x}$$

(3) $$\int x^n \cdot e^{ax} dx = ?$$

$$v' = e^{ax} \qquad v = \frac{1}{a} e^{ax}$$

$$u = x^n \qquad u' = n \cdot x^{n-1}$$

$$\int x^n \cdot e^{ax} dx = x^n \cdot \frac{1}{a} e^{ax} - \int n \cdot x^{n-1} \cdot \frac{e^{ax}}{a} dx$$

$$\int x^n \cdot e^{ax} dx = \frac{1}{a} x^n \cdot e^{ax} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} \cdot e^{ax} dx$$

$$\int x^{n-1} \cdot e^{ax} dx = \frac{1}{a} x^{n-1} \cdot e^{ax} - \frac{n-1}{a} \int x^{n-2} \cdot e^{ax} dx$$

usw.

(4) $$\int \sin^2 x dx = \int \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2x) dx$$

$$= \int \tfrac{1}{2} dx - \int \tfrac{1}{2} \cos 2x dx$$

$$= \tfrac{1}{2} x + c - \int \tfrac{1}{2} \cos 2x dx$$

$$\textit{Berechne}: -\tfrac{1}{2} \int \cos 2x dx$$

$$\textit{Setze} \quad u = 2x \quad \frac{du}{dx} = 2 \quad dx = \frac{du}{2}$$

$$\int \cos 2x\,dx = \int \cos u \frac{du}{2} = \int \frac{\cos u}{2} du = \frac{1}{2}\int \cos u\,du = \frac{1}{2}\sin u$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin 2x$$

$$\Rightarrow \int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}(x - \frac{1}{2}\sin 2x) + c$$

(5) $$\int_0^{\pi} x^2 \cdot \cos x\,dx = \left[x^2 \cdot \sin x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2x \cdot \sin x\,dx \qquad (*)$$

$u = x^2 \qquad u' = 2x$

$v' = \cos x \qquad v = \sin x$

Bleibt: $\int 2\mathrm{x} \cdot \sin \mathrm{xdx} = 2 \cdot \int \mathrm{x} \cdot \sin \mathrm{xdx}$

$$\int x \cdot \sin x dx = -x \cdot \cos x - \int 1 \cdot (-\cos x) dx$$

$$= -x \cdot \cos x + \int \cos x dx$$

$$= -x \cdot \cos x + \sin x + c$$

$u = x \qquad u' = 1$

$v' = \sin x \qquad v = -\cos x$

$$(*) \quad = \left[x^2 \cdot \sin x\right]_0^{\pi} - 2\left[-x \cdot \cos x + \sin x\right]_0^{\pi}$$

$$= \pi^2 \cdot \sin \pi - 0^2 \cdot \sin 0 - 2\left[-\pi \cdot \cos \pi + \sin \pi + 0 \cdot \cos 0 - \sin 0\right]$$

$$= -2\left[-\pi \cdot (-1)\right] = -2\pi$$

6.2.3 Integration gebrochenrationaler Funktion durch Partialbruchzerlegung

$Bsp.: \quad \int \frac{x^3+4x+2}{x^2-4}dx = ?$

$$f(x) = \frac{x^3+4x+2}{x^2-4} \quad \textit{ist unecht gebrochenrational}$$

Somit Zerlegung in Polynom + echt gebrochenrationale Funktion möglich.

Polynomdivision :

$$(x^3+4x+2):(x^2-4) = x + \frac{8x+2}{x^2-4}$$

$$\frac{-(x^3-4x)}{\quad 8x+2}$$

Somit : $\int \frac{x^3+4x+2}{x^2-4}dx = \int \left(x + \frac{8x+2}{x^2-4} \right) dx = \int x dx + \int \frac{8x+2}{x^2-4}dx$

Integration von Polynom mit $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$

$$d.h. \int x dx = \frac{1}{2} x^2 + c$$

Anm.: $\int (a^n x^n + a^{n-1} x^{n-1} + a_1 x^1 + a_0) dx$

$$= a^n \int x^n dx + a^{n-1} \int x^{n-1} dx + a_1 \int x dx + a_o \int 1 dx$$

Somit bleibt zu lösen :

$$\int \frac{8x+2}{x^2-4} dx = ?$$

echt gebrochenrational, d.h. Grad Nenner > Grad Zähler

"einfachster Fall" einer echt gebrochenrationalen Funktion :

$$\int \frac{A}{x+B} dx = A \cdot \ln|x+B| - c \quad d.h. \textit{ ist lösbar}$$

<u>*Lösungsidee* :</u> Rückführung auf diesen einfachen Fall

$$\frac{8x+2}{x^2-4} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} \qquad A_1, A_2, x_1, x_2 \text{ sind } \textit{gesucht!}$$

$$\rightarrow \textit{Partialbruchzerlegung}$$

Falls dies gelingt, dann Problem gelöst!

Bestimmung von A_1, A_2, x_1, x_2 :

$$\frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{x-x_2}=\frac{A_1(x-x_2)+A_2(x-x_1)}{(x-x_1)\cdot(x-x_2)}\overset{!}{=}\frac{8x+2}{x^2-4}$$

Nenner : $x^2-4=(x-2)\cdot(x+2)\overset{!}{=}(x-x_1)\cdot(x-x_2)$

$\Rightarrow x_1=-2, x_2=+2$

Zähler : $A_1(x-x_2)+A_2(x-x_1)=A_1(x-2)+A_2(x-(-2))=$

$A_1x-2A_1+A_2x+2A_2=x\cdot(A_1+A_2)-2A_1+2A_2=8x+2$

$A_1+A_2=8 \qquad (1)$

$2A_1-2A_2=2 \qquad (2) \qquad$ *Gls. für* A_1, A_2

$(2) A_1-A_2=1 \Leftrightarrow A_1=1+A_2$

$in\,(1)\;\; 1+A_2+A_2=8 \Leftrightarrow 1+2A_2=8 \Leftrightarrow 2A_2=8-1 \Leftrightarrow A_2=\frac{7}{2}$

$in\,(2)\;\; A_1=1+\frac{7}{2}=\frac{9}{2}$

Somit $\quad A_1=\frac{9}{2}$ *und* $A_2=\frac{7}{2}$

$d.h. \int\frac{8x+2}{x^2-4}dx=\int\frac{4{,}5}{x-(-2)}dx+\int\frac{3{,}5}{x-2}dx$

$=4{,}5\cdot\ln|x+2|+3{,}5\cdot\ln|x-2|+c$

Insgesamt erhalten wir :

$$\int\frac{x^3+4x+2}{x^2-4}dx=\frac{1}{2}x^2+4{,}5\ln|x+2|+3{,}5\ln|x-2|+c$$

Bsp.: Partialbruchzerlegung

$$\int \frac{4x^3 - 2x^2 + 1}{x^2 - 5x + 6} dx = ?$$

GradZähler > GradNenner $\Rightarrow$ Polynomdivision

zurPolynomdivision :

$$5623 : 21 = 267 + \frac{16}{21}$$

$$\begin{array}{l} \underline{-(42)} \\ \quad 142 \\ \underline{-(126)} \\ \quad\quad 163 \\ \quad \underline{-(147)} \\ \quad\quad\quad 16 \end{array}$$

$$(4x^3 - 2x^2 + 1) : (x^2 - 5x + 6) = 4x + 18 + \frac{66x - 107}{x^2 - 5x + 6}$$

$$\begin{array}{l} \underline{-(4x^3 - 20x^2 + 24x)} \\ \quad\quad 18x^2 - 24x + 1 \\ \quad \underline{-(18x^2 - 90x + 108)} \\ \quad\quad\quad 66x - 107 \end{array}$$

Somit : $\int \frac{4x^3 - 2x^2 + 1}{x^2 - 5x + 6} dx = \int 4x + 18 dx + \int \frac{66x - 107}{x^2 - 5x + 6}$

$$= \frac{4}{5} x^5 + 18x + c + \int \frac{66x - 107}{x^2 - 5x + 6} dx$$

1. Bestimmung der Nullst. von $N = x^2 - 5x + 6$

$$x_{1/2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} \qquad x_1 = 3 \quad x_2 = 2$$

2. $$\frac{66x - 107}{x^2 - 5x + 6} = \frac{A}{(x-3)} + \frac{B}{(x-2)}$$

Aufstellen des linearen Gls. zur Berechnung von A und B

Variante 1: Hauptnenner

$$66x - 107 = A(x - 2) + B(x - 3) = Ax - 2A + Bx - 3B$$
$$\Leftrightarrow 66x - 107 = (A + B)x - 2A - 3B$$

Koeffizientenvergleich ergibt:

$$(1) \quad 66 = A + B$$
$$(2) \quad -107 = -2A - 3B$$

Lösung des Gls.:

$$(1) \quad \Rightarrow A = 66 - B \quad \text{in (2) ergibt: } -107 = -2(66 - B) - 3B$$
$$\Leftrightarrow -107 = -132 + 2B - 3B \quad / +132$$
$$25 = -B \Leftrightarrow B = -25$$

Einsetzen liefert: $A = 66 - (-25) = 91$

Variante 2: Einsetzen der Nennernullstellen in

$$66x - 107 = A(x - 2) + B(x - 3)$$

$x_1 = 3$: $\quad 66 \cdot 3 - 107 = A(3 - 2) + B(3 - 3)$
$$198 - 107 = A \cdot (1)$$
$$91 = A$$

$x_2 = 2$: $\quad 66 \cdot 2 - 107 = A(2 - 2) + B(2 - 3)$
$$132 - 107 = B(-1)$$
$$25 = -B$$
$$-25 = B$$

Somit erhalten wir:

$$\frac{66x - 107}{x^2 - 5x + 6} = \frac{91}{x - 3} - \frac{25}{x - 2}$$
$$\Rightarrow \int \frac{66x - 107}{x^2 - 5x + 6}\,dx = \int \frac{91}{x - 3} - \frac{25}{x - 2}\,dx = \int \frac{91}{x - 3}\,dx - \int \frac{25}{x - 2}\,dx$$
$$= 91 \cdot \int \frac{1}{x - 3}\,dx - 25 \int \frac{1}{x - 2}\,dx$$
$$= 91 \cdot \ln|x - 3| + c_1 - 25 \cdot \ln|x - 2| + c_2$$

Bsp.: $\int \frac{x-2}{x^2+2x+1} = ?$

Nullstellen des Nenners:

$x_1 = 1 \quad x_2 = 1 \quad d.h.\ 1\ ist\ doppelte\ Nst.$

$\frac{x-2}{x^2+2x+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+1} \quad \leftarrow Hauptnenner\ wäre\ x+1$

$x-2 = A(x+1) + B(x+1) = x(A+B) + A + B$

$\Rightarrow A+B=1 \quad \wedge \quad A+B=-2 \quad \Rightarrow keine Lösung$

Neuer Ansatz bei mehrfacher Nullstelle (Idee: $\frac{1}{x^n}$ ist integrierbar!)

$\frac{x-2}{x^2+2x+1} = \frac{A}{(x+1)^2} + \frac{B}{(x+1)}$

$\Rightarrow x-2 = A + B(x+1) = xB + A + B$

$\Rightarrow$ B = 1 und A + B = -2 $\Rightarrow A+1=-2 \Rightarrow A=-3$

Somit:

$$\int \frac{x-2}{x^2+2x+1}dx = \int \frac{A}{(x+1)^2}dx + \int \frac{B}{(x+1)}dx$$

$$= \int \frac{A}{(x+1)^2}dx + B \cdot \ln|x+1|$$

Bleibt:

$$A\int \frac{1}{(x+1)^2}dx = ? \qquad u = x+1 \qquad \frac{du}{dx} = 1 \iff du = dx$$

$$A\int \frac{1}{(x+1)^2}dx = A\int \frac{1}{u^2}du = A \cdot (\frac{-1}{u}) + c = \frac{-A}{x+1} + c$$

Insgesamt:

$$\int \frac{x-2}{x^2+2x+1}dx = \frac{-A}{x+1} + B \cdot \ln|x+1| + c$$

Bsp.: $\int \frac{3x+4}{x^2-6x+34}dx = ?$

NullstelledesNenners:

$$x_{1/2} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 34}}{2} = \frac{6 \pm 10i}{2}$$

$\sqrt{36 - 4 \cdot 34} = \sqrt{36-136} = \sqrt{-100} \quad \leftarrow$ keine reelle Lösung

Aber es existiert eine Lösung im Definitionsbereich der komplexen Zahlen :

Nullstellen :

$$x_1 = 3-5i \qquad x_2 = 3+5i \qquad wobei\ i = \sqrt{-1} \qquad \Rightarrow \quad i \cdot i = -1$$

$$\begin{aligned}
&(x-x_1)\cdot(x-x_2) = (x-(3-5i))\cdot(x-(3+5i)) \\
&= (x-3+5i)\cdot(x-3-5i) \\
&= x^2 - 3x + 5ix \\
&\qquad -3x \qquad +9 - 15i \\
&\qquad\qquad -5ix \quad +15i - 25i^2 \\
&= x^2 - 6x \qquad +9 - 25i^2 = x^2 - 6x + 9 + 25 = x^2 - 6x + 34
\end{aligned}$$

Ansatz mit A und B wie bisher würde dazu führen, daß A und B komplexe Zahlen wären.

$\Rightarrow$ Falls die Nullstelle des Nenners komplex und einfach (Vielfachheit 1) ist, dann :

Neuer Ansatz :

Idee : $\displaystyle\int \frac{f'(x)+c}{f(x)}dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx + \int \frac{c}{f(x)}dx$

$= \ln\left|f(x)\right| + c_1$

wobei f(x) vom Grad 2 ist! (komplexe + konjugiert komplexe Lösung)

$$\frac{3x-4}{x^2-6x+34} = \frac{\frac{3}{2}(2x-6)+5}{x^2-6x+34}$$

$$f(x) = x^2 - 6x + 34$$

$$f'(x) = 2x - 6$$

Somit :

$$\int \frac{3x-4}{x^2+6x+34}dx = \int \frac{\frac{3}{2}(2x-6)+5}{x^2-6x+34}dx$$

$$= \underbrace{\frac{3}{2}\int \frac{2x-6}{x^2-6x+34}dx}_{} + 5\int \frac{1}{x^2-6x+34}dx$$

$$\frac{3}{2}\cdot \ln\left|x^2-6x+34\right| + c_1$$

Bleibt zu berechnen:

$$\int \frac{1}{x^2-6x+34}dx = \int \frac{1}{(x-3)^2+25}dx = \int \frac{\frac{1}{25}}{\frac{(x-3)^2}{25}+\frac{25}{25}}dx$$

$$\uparrow$$

quadr. Ergänzung $(x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$