

Programm: Trapezformel

Eingabe: Integrationsuntergrenze a

Integrationsobergrenze b

Anzahl Unterteilungen n

[Funktion f(x)]

Verarbeitung:

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \cdot \left(\frac{1}{2} (f(a) + f(b)) + \sum_{i=1}^{n-1} f(a + i \cdot h) \right) = I$$

Ausgabe: I

10 REM EINGABE

20 INPUT "UNTERGRENZE :", A

30 INPUT "OBERGRENZE :", B

40 INPUT "ANZAHL UNTERTEILUNGEN :", N

100 REM VERARBEITUNG

110 H = (B - A) / N

120 X = A

130 GOSUB 500

140 I = 0,5 * Y

150 X = B

160 GOSUB 500

170 I = I + 0,5 * Y

180 FOR I = 1 TO N - 1

190 X = A + I * H

200 GOSUB 500

210 I = I + Y

220 Next I

230 I = I / H

300 REM AUSGABE

310 PRINT "NAEHERUNGSWErt :", I

320 END

500 REM FUNKTION Y = F(X)

510 Y = 1 / X

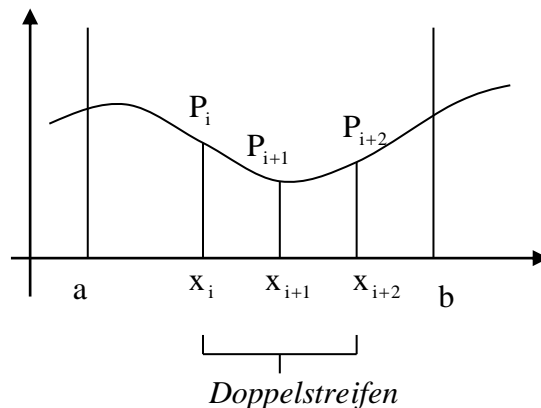
520 RETURN

6.4.2 Simpsonsche Formel

- Zerlegung von $[a, b]$ in $2n$ gleiche Teile (d.h. gerade Anzahl)

$$h = \frac{b - a}{2n}$$

- Zusammenfassung von je 2 benachbarten Streifen zu einem Doppelstreifen
- Näherungsweise Berechnung der "Fläche" des Doppelstreifen



Pro Doppelstreifen sind 3 Funktionswerte bekannt.

Lösungsansatz :

Exakter Funktionsverlauf durch die Punkte P_i, P_{i+1} und P_{i+2} wird durch eine Parabel angenähert (nicht durch Geraden \rightarrow Trapez):

$$\text{Allg. Parabeldarst.: } y(x) = ax^2 + bx + c$$

Klar : Einsetzen der Punkte P_i, P_{i+1} und P_{i+2} führt zur eindeutigen Bestimmung von a, b und c .

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x) dx &\approx \int_{x_i}^{x_{i+2}} ax^2 + bx + c dx = \left[a \frac{x^3}{3} + b \frac{x^2}{2} + cx \right]_{x_{i+1}-h}^{x_{i+1}+h} \\ &= \frac{a}{3} (x_{i+1} + h)^3 + \frac{b}{2} (x_{i+1} + h)^2 + c(x_{i+1} + h) - \frac{a}{3} (x_{i+1} - h)^3 - \frac{b}{2} (x_{i+1} - h)^2 \\ &\quad - c(x_{i+1} - h) \\ &= \frac{a}{3} (6x_{i+1}^2 h + 2h^3) + \frac{b}{2} (4x_{i+1} h) + c \cdot 2h \quad (*) \end{aligned}$$

Ziel: " \int " soll lediglich durch die Stützwerte y_i, y_{i+1} und y_{i+2} dargestellt werden.

Stützwerte sind Funktionswerte der Parabel $y = ax^2 + bx + c$.

Einsetzen in P_i, P_{i+1} und P_{i+2} mit $x_i = x_{i+1} - h$ $x_{i+2} = x_{i+1} + h$ liefert

$$\begin{aligned} y_i &= a(x_{i+1} - h)^2 + b(x_{i+1} - h) + c \\ 4y_{i+1} &= 4ax_{i+1}^2 + 4bx_{i+1} + 4c \\ + y_{i+2} &= a(x_{i+1} + h)^2 + b(x_{i+1} + h) + c \\ \hline y_i + 4y_{i+1} + y_{i+2} &= a(x_{i+1}^2 - 2x_{i+1}h + h^2 + 4x_{i+1}^2 + x_{i+1}^2 + 2x_{i+1}h + h^2) \\ &\quad + b(x_{i+1} - h + 4x_{i+1} + x_{i+1} + h) + 6c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_i + 4y_{i+1} + y_{i+2} &= a(6x_{i+1}^2 + 2h^2) + b(6x_{i+1}) + 6c \quad / \cdot \frac{h}{3} \\ \frac{h}{3}(y_i + 4y_{i+1} + y_{i+2}) &= \frac{a}{3}(6x_{i+1}^2 h + 2h^3) + b(\frac{h}{3} 6x_{i+1}) + \frac{6}{3}ch \end{aligned}$$

Somit folgt mit (*):

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \approx \frac{h}{3}(y_i + 4y_{i+1} + y_{i+2})$$

Summation über sämtliche Doppelstreifen ergibt die Näherungslösung:

Sei A_i die Fläche des Doppelstreifen \Rightarrow

$$\begin{aligned} \int_b^a f(x) dx &\approx A_1 + A_2 + A_3 + A_4 \dots + A_n \\ &= \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) + \dots + \frac{h}{3}(y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}) \\ &= \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2 + y_2 + 4y_3 + y_4 + \dots + y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}) \\ &= \frac{h}{3}[(y_0 + y_{2n}) + 4(y_1 + y_3 + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + y_{2n-2})] \end{aligned}$$

Zusammenfassung Simpsonsche Formel

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} [(y_0 + y_{2n}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2n-2})]$$

$$= \frac{h}{3} [\sum_{ab} + 4\sum_n + 2\sum_G]$$

wobei $h = \frac{b-a}{2n} \hat{=}$ Breite eines einfachen Streifens

und y_i $i = 1, 2, 3, \dots, 2n$ Stützwerte (Fkt - Werte, Wertetabelle)

Anmerkung : Im Grenzfalle $\lim_{n \rightarrow \infty}$ strebt der Näherungswert gegen den exakten Wert.

Bsp. 1:

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx = ?$$

a) Exakte Lösung :

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx = [\ln|x|]_1^2 = \ln 2 - \ln 1 \approx 0,693147$$

b) Berechnung einer Näherungslösung mit Simpsonscher-Formel
Wähle $n=5$, d.h. i Stützstellen $i=0, 1, 2, 3, \dots, 10$

Tabelle

i	x_i	$y_i = f(x_i) = \frac{1}{x_i}$		
0	1,0	1,0		
1	1,1		0,909091	
2	1,2			0,833333
3	1,3		0,769231	
4	1,4			0,714286
5	1,5		0,666667	
6	1,6			0,625000
7	1,7		0,588235	
8	1,8			0,555556
9	1,9		0,526316	
10	2	0,5		
			1,5	
			3,459540	2,728175
			$= \sum_{ab}$	$= \sum_n$
				$= \sum_G$

$$\Rightarrow \int_1^2 \frac{1}{x} dx \approx \frac{h}{3} (\sum_{ab} + 4\sum_n + \sum_G) = \frac{0,1}{3} \cdot 20,794510 = 0,693150$$

c) Bestimmung einer Näherungslösung mit der Trapezformel

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx = [\ln|x|]_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = 0,693147$$

a) Trapez

Tabelle

i	x_i	$y_i = \frac{1}{x_i}$	
0	1,0	1,0	
1	1,1		0,909091
2	1,2		0,833333
3	1,3		0,769231
4	1,4		0,714286
5	1,5		0,666667
6	1,6		0,625000
7	1,7		0,588235
8	1,8		0,555556
9	1,9		0,526316
10	2,0	0,5	
		1,5	6,187715

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx \approx 0,1 \left(\frac{1}{2} \cdot 1,5 + 6,187715 \right) = 0,693771$$

Untersuchung des Ergebnisses:

$\text{Wert}_{\text{Trapez}} > \text{exakter Wert}$

Vergleich Trapezformel - Simpson-Formel an diesem Bsp. zeigt:

exakt : 0,693147
 Trapez : 0,693771
 Simpson : 0,693150

Näherungslösung mit Simpson ist besser.