

Oberflächenintegrale, Satz von Gauß, Satz von Stokes

Aufgabe 1.

Berechnen Sie mit einem Oberflächenintegral den Fluß des Vektorfeldes \vec{F} durch die Fläche $z = f(x, y) = x^2 - y^2$ mit $0 \leq x \leq 2$ und $0 \leq y \leq 3$. Dabei sei $\vec{F} = y \vec{e}_x + x \vec{e}_y - xz \vec{e}_z$. (Die Orientierung der Fläche soll nach oben gewählt werden.)

Aufgabe 2.

Ein Quader mit den gegenüberliegenden Ecken $(0|0|0)$ und $(1|6|2)$ sei gegeben. Berechnen Sie den Fluß des Vektorfeldes $\vec{F} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z$ durch die Oberfläche des Quaders auf zwei Arten:

- (a) direkt,
- (b) mit dem Satz von Gauß.

Hinweis: Bei der direkten Berechnung kann man die Besonderheiten der Problemstellung ausnutzen, für jede Teilfläche $\vec{F} \cdot \vec{n}$ bestimmen, und damit leicht den Fluß durch alle Teilflächen des Quaders bekommen.

Aufgabe 3.

Gegeben sei ein Quader mit gegenüberliegenden Ecken $(0|0|0)$ und $(5|3|2)$. Berechnen Sie für die beiden folgenden Vektorfelder \vec{F} den Fluß $\oiint_S \vec{F} d\vec{S}$ durch die geschlossene Oberfläche S des Quaders. Verwenden Sie dabei den Satz von Gauß.

$$(a) \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} x(4+z) \\ yz \\ x-z^2 \end{pmatrix} \qquad (b) \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} xyz \\ y-z \\ 3x^2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4.

Gegeben sei das Vektorfeld $\vec{F} = -3y \vec{e}_x + (z^2/2) \vec{e}_y + 7 \vec{e}_z$. Ferner sei die oberhalb der xy -Ebene liegende Halbkugel $z = \sqrt{4-x^2-y^2}$ mit $-2 \leq x \leq 2$ und $-2 \leq y \leq 2$ gegeben (Orientierung nach oben). Gesucht ist der **Fluß der Rotation** von \vec{F} durch die Halbkugel. Führen Sie die Berechnung auf mehrere Arten durch:

- (a) direkt mit dem Oberflächenintegral;
- (b) nach dem Satz von Stokes mit einem Linienintegral über diejenige Kreislinie in der xy -Ebene, die die Halbkugel begrenzt;
- (c) nach dem Satz von Stokes (Oberflächenunabhängigkeit) mit einem Flußintegral bezüglich der Kreisfläche in der xy -Ebene.