Satz von Green, Flußintegrale

Aufgabe 1.
Die geschlossene Kurve C verlaufe jeweils geradlinig von $(0,0)$ nach $(3,0)$, von dort nach $(3,1)$, von dort nach $(0,1)$ und schließlich zurück nach $(0,0)$. Ferner sei $\vec{F}$ das Vektorfeld mit

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} x + y^2 \\ 4x^2y - 2y^3 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie das Linienintegral $\oint_C \vec{F}\, d\vec{r}$ mit zwei verschiedenen Methoden, a) direkt und b) mit Hilfe des Satzes von Green.

Aufgabe 2.
Berechnen Sie das Integral $\oint_C \vec{F}\, d\vec{r}$ mit dem Satz von Green.

(a) Es sei $\vec{F} = M\vec{e}_x + N\vec{e}_y$ mit $M(x,y) = x^2 + 4y$ und $N(x,y) = 7x + 2y^2$. Ferner sei die Kurve C gleich dem Einheitskreis, durchlaufen entgegen dem Uhrzeigersinn.

(b) Es sei $\vec{F} = M\vec{e}_x + N\vec{e}_y$ mit $M(x,y) = y + e^x$ und $N(x,y) = 2x^2 + \cos y$. Außerdem sei C der Rand des Dreiecks mit den Ecken $(0,0)$, $(1,1)$ und $(2,0)$, durchlaufen entgegen dem Uhrzeigersinn.

Aufgabe 3.
Berechnen Sie die Flußintegrale $\int_C \vec{F}\,\vec{n}\, ds$ mit den folgenden Vektorfeldern $\vec{F}$ und Kurven C.

(a) $\vec{F} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$, C: geradlinig von $(0,0)$ nach $(3,3)$.

(b) $\vec{F} = \begin{pmatrix} 5x^2 - y \\ 2x - 9y \end{pmatrix}$, C: der Teil der Parabel $y = x^2$ von $(0,0)$ nach $(1,1)$.

Aufgabe 4.
Berechnen Sie das Integral $\oint_C \vec{F}\,\vec{n}\, ds$ mit dem Satz von Green.

(a) Es sei $\vec{F} = M\vec{e}_x + N\vec{e}_y$ mit $M(x,y) = x^2 + 3y^2$ und $N(x,y) = 5y - 2xy$. Ferner sei C gleich dem Rand des Quadrats mit den Ecken $(\pm 1, \pm 1)$, durchlaufen entgegen dem Uhrzeigersinn.

(b) Es sei $\vec{F} = M\vec{e}_x + N\vec{e}_y$ mit $M(x,y) = 3x - y^3$ und $N(x,y) = xy^2$. Die Kurve C sei der entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufene Rand der ebenen Fläche, die von der x-Achse und der Parabel $y = 4 - x^2$ eingeschlossen wird.