Vektorfelder, Divergenz

Aufgabe 1.
Skizzieren Sie die folgenden Vektorfelder $\vec{F}$, indem Sie jeweils einige typische Vektoren zeichnen. Verwenden Sie beispielsweise sowohl für x als auch für y den Bereich von -2 bis 2, und zeichnen Sie die Vektoren von $\vec{F}$ an allen Punkten mit ganzzahligen Koordinaten.

a) $\vec{F} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ x/4 \end{pmatrix}$ b) $\vec{F} = \begin{pmatrix} x/4 \\ -y/4 \end{pmatrix}$ c) $\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ (x+y)/4 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2.
Berechnen Sie die Divergenz $\operatorname{div} \vec{F}$ der gegebenen Vektorfelder $\vec{F}$.

a) $\vec{F} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ x/4 \end{pmatrix}$ b) $\vec{F} = \begin{pmatrix} x/4 \\ -y/4 \end{pmatrix}$ c) $\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ (x+y)/4 \end{pmatrix}$

d) $\vec{F} = \begin{pmatrix} -2x^2y \\ 7xy \\ 5 \end{pmatrix}$ e) $\vec{F} = \begin{pmatrix} x-y \\ y-z \\ x-z \end{pmatrix}$ f) $\vec{F} = \begin{pmatrix} \sin x + \cos y \\ \cos y - \sin z \\ x^2+y^2+z^2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3.
Die Divergenz $\nabla \vec{F}$ von Vektorfeldern $\vec{F}$ soll an vorgegebenen Stellen berechnet werden.

a) $\vec{F} = M\vec{e}_x + N\vec{e}_y$ mit $M = M(x,y) = xe^y$ und $N = N(x,y) = x \sin y$.
Bestimmen Sie $\nabla \vec{F}(0,0)$ sowie $\nabla \vec{F}(3,0)$.

b) $\vec{F} = P\vec{e}_x + Q\vec{e}_y + R\vec{e}_z$ mit $P = P(x,y,z) = xy^2$ und $Q = Q(x,y,z) = xy^2z$ sowie $R = R(x,y,z) = x + 2y + 3z$.
Geben Sie $\nabla \vec{F}(1,2,-3)$ und $\nabla \vec{F}(1,1,-2)$ an.

Aufgabe 4.
Das ebene Vektorfeld $\vec{F} = M\vec{e}_x + N\vec{e}_y$ mit $M = M(x,y) = 0,5\,x^2 + 2x$ sowie $N = N(x,y) = y^2$ sei gegeben. An welchen Stellen hat es Quellen, wo hat es Senken, und wo ist es quellen- und senkenfrei?