Gradient, Richtungsableitung

Aufgabe 1.
Die Funktion $z = f(x, y) = (x^2 + y^2)/4$ sei gegeben.
a) Zeichnen Sie ein Diagramm mit den Höhenlinien $z = 1/4$ und $z = 1$ von f.
b) Berechnen Sie den Gradienten $\mathrm{grad}(f)$ von f und dessen Betrag.
c) Zeichnen Sie in das Höhenliniendiagramm an mehreren Stellen den zugehörigen Gradientenvektor ein, zum Beispiel auf der Höhenlinie $z = 1/4$ in den Punkten $(1\,|\,0)$, $(1/\sqrt{2}\,|\,1/\sqrt{2})$, $(0\,|\,1)$ u.s.w., auf der Höhenlinie $z = 1$ in $(2\,|\,0)$, $(2/\sqrt{2}\,|\,2/\sqrt{2})$, $(0\,|\,2)$ u.s.w.

Aufgabe 2.
Im folgenden sind zwei ebene Skalarfelder $\phi = \phi(x, y)$ sowie zwei räumliche Skalarfelder $\phi = \phi(x, y, z)$ gegeben. Berechnen Sie die Gradienten $\nabla\phi$ an den vorgegebenen Stellen (x_0, y_0) bzw. (x_0, y_0, z_0).

a) $\phi(x, y) = \ln(x^2 + y^2), \qquad (x_0, y_0) = (1, 3)$

b) $\phi(x, y) = x^2 e^{-5y}, \qquad (x_0, y_0) = (2, 0)$

c) $\phi(x, y, z) = x^3 - 2yz + z^2, \qquad (x_0, y_0, z_0) = (1, 3, -2)$

d) $\phi(x, y, z) = x\sqrt{y^2 + z^2}, \qquad (x_0, y_0, z_0) = (3, -2, 0)$

Aufgabe 3.
Berechnen Sie die Richtungsableitung von f an der Stelle P in Richtung von $\vec{v}$, d.h. berechnen Sie $\partial f/\partial\vec{e}$ an P mit $\vec{e} = \vec{v}/|\vec{v}|$.

a) $f(x, y) = x^2 + xy - 3y^2, \quad P = (2, 1), \quad \vec{v} = (4, 3)$

b) $f(x, y, z) = x^2 \sin y + x^3 z + 2z^2, \quad P = (1, 0, 1), \quad \vec{v} = (4, 12, 3)$

Aufgabe 4.
Die Kurve der impliziten Funktion $F(x, y) = 2x^3 + y^3 - 5xy = 0$ kann als Höhenlinie $z = 0$ von $z = F(x, y)$ aufgefaßt werden. Da Gradienten senkrecht auf Höhenlinien stehen, muß der Gradient von F an der Stelle $(1\,|\,2)$ dort senkrecht auf der Kurve von $F(x, y) = 0$ stehen.
a) Berechnen Sie den Gradienten von F an der Stelle $(1\,|\,2)$.
b) Leiten Sie damit die Gleichung der Tangente her, die im Punkt $(1\,|\,2)$ die Kurve berührt. (Analog zur Herleitung der Gleichung einer Tangentialebene aus einem Normalenvektor.)

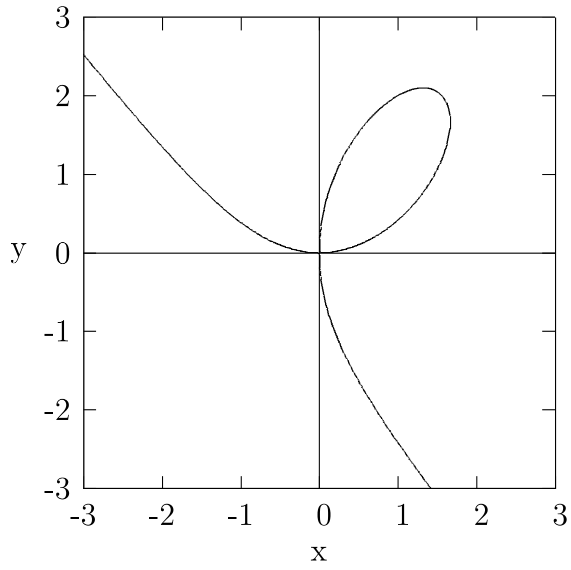

Abbildung 1: Kurve der Funktion $F(x, y) = 2x^3 + y^3 - 5xy = 0$