Konservative Vektorfelder

Aufgabe 1.
Überprüfen Sie, welche der folgenden Vektorfelder $\vec{F}$ konservativ sind, und bestimmen Sie deren Potentiale.

a) $\vec{F} = \begin{pmatrix} 2 \\ x \end{pmatrix}$ b) $\vec{F} = \begin{pmatrix} x/4 \\ -y/4 \end{pmatrix}$ c) $\vec{F} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

d) $\vec{F} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ e) $\vec{F} = \begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix}$ f) $\vec{F} = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix}$

Aufgabe 2.
Das Vektorfeld $\vec{F} = M\vec{e}_x + N\vec{e}_y$ mit $M(x,y) = y^2$ und $N(x,y) = 2xy$ sei gegeben.
a) Zeigen Sie, daß $\vec{F}$ konservativ ist.
b) Berechnen Sie das Potential zu $\vec{F}$.
c) Welchen Wert hat das Linienintegral $\int_C \vec{F}\, d\vec{r}$ für einen beliebigen Weg C vom Anfangspunkt $(1,-1)$ bis zum Endpunkt $(3,2)$?

Aufgabe 3.
Zeigen Sie, daß das Linienintegral

$$\int_C \cos(y)\, dx - x\sin(y)\, dy$$

wegunabhängig ist, und berechnen Sie den Wert des Integrals für eine Kurve C, die den Anfangspunkt $(0,0)$ und den Endpunkt $(2,\pi)$ hat.

Aufgabe 4.
Für welchen Wert der Konstanten a ist das Vektorfeld

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} axy + y \\ 3x^2 + x \\ 2z \end{pmatrix}$$

konservativ? Berechnen Sie für diesen Fall das Linienintegral $\int_C \vec{F}\, d\vec{r}$ längs eines beliebigen Weges C, der vom Anfangspunkt $(0,0,4)$ bis zum Endpunkt $(2,1,3)$ führt.

Copyright © 2010, 2011 Prof. Dr. Hans-Rudolf Metz. All rights reserved.