

## Differentialoperationen

### Aufgabe 1.

Die Funktion  $w(x, y) = 5x^2 + \sin(y)$  mit  $x = x(u, v) = u^2 + v$  und  $y = y(u, v) = ue^v$  sei gegeben. Berechnen Sie die partiellen Ableitungen  $\partial w/\partial u$  und  $\partial w/\partial v$  auf zwei Arten: a) mit der Kettenregel, b) über eine Substitution.

### Aufgabe 2.

Berechnen Sie den Gradienten zur Funktion  $f(x, y) = x^2 + 3e^{-y}$  und zur Funktion  $w(x, y, z) = x^2 \sin(y) + xz^3 + 7z$ . Welchen Betrag hat der Gradient von  $f$  an den Stellen  $(0; 0)$  und  $(1; 0)$ , sowie der Gradient von  $w$  an  $(1; 0; 0)$  ?

### Aufgabe 3.

Berechnen Sie zur Funktion  $f(x, y) = x^2 \sin(y)$  die Richtungsableitung in Richtung  $\vec{a} = (1; 1)$ . Welchen Wert hat die Richtungsableitung an den Stellen  $P_1 = (0; 0)$ , an  $P_2 = (1; 0)$  und an  $P_3 = (\pi; \pi)$  ?

### Aufgabe 4.

Die Divergenz des ebenen Vektorfeldes

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} x^2y \\ -x^3y^5 \end{pmatrix}$$

ist gesucht. Welchen Wert hat die Divergenz an der Stelle  $(1; 1)$  und welchen an der Stelle  $(2; 1)$  ?

### Aufgabe 5.

Das Vektorfeld

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} xyz \\ x^2y \\ 2z^2 + 3xy \end{pmatrix}$$

ist gegeben. Gesucht ist die Größe der Divergenz in den Punkten  $P_1 = (1; 1; 1)$  und  $P_2 = (1; 3; 2)$  sowie  $P_3 = (2; 3; 1)$ .

### Aufgabe 6.

Berechnen Sie die Rotation der folgenden ebenen Vektorfelder.

a)  $\begin{pmatrix} x^2y \\ xy^3 \end{pmatrix}$       b)  $\begin{pmatrix} xy^2 \\ y^2 \sin x \end{pmatrix}$       c)  $\begin{pmatrix} x + y \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix}$

**Aufgabe 7.**

Zeigen Sie, daß das ebene Vektorfeld

$$\vec{F} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} (x\vec{e}_x + y\vec{e}_y)$$

wirbelfrei ist.

**Aufgabe 8.**

Berechnen Sie die Rotation des Vektorfeldes

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} x^2y \\ xyz \\ x^2 + yz \end{pmatrix}.$$

Welchen Wert hat die Rotation an den Stellen  $P_1 = (1; 1; 1)$  und  $P_2 = (1; 2; 3)$  ?