

Tangentialebenen, Doppelintegrale

Aufgabe 1.

Die Ebene $4x - 7y - 4z = -18$ sei gegeben. Gesucht sind

1. ein Normalenvektor auf der Ebene,
2. der senkrechte Abstand der Ebene vom Ursprung,
3. die Schnittpunkte der Ebene mit den Koordinatenachsen.

Aufgabe 2.

Die Funktion $z = 4x^2y^4 - 3xy$ soll an der Stelle mit $x_0 = 2$ und $y_0 = 1/2$ untersucht werden. Gesucht sind

1. der Flächennormalenvektor,
2. die lineare Approximationsformel für Δz ,
3. die Gleichung der Tangentialebene,
4. der senkrechte Abstand der Tangentialebene vom Ursprung,
5. die Schnittpunkte der Tangentialebene mit den Koordinatenachsen.

Aufgabe 3.

Zur Funktion $z = \sqrt{2}(1 - x^3)\cos(y)$ ist an der Stelle $x_0 = 1/2$, $y_0 = \pi/4$ die Tangentialebene und der Flächennormalenvektor gesucht.

Aufgabe 4.

Berechnen Sie das Integral

$$\int_{y=0}^{\pi/2} \int_{x=0}^6 (x^2 + x \cos(y)) dx dy.$$

Aufgabe 5.

Die Funktion $z = (1 - x)e^y$ soll für $0 \leq x \leq 1$ und $-1 \leq y \leq 1$ betrachtet werden.

1. Zeichnen Sie eine Skizze.
2. Berechnen Sie das Volumen zwischen der Funktionsfläche und der xy -Ebene.
3. Schätzen Sie mit Hilfe der Skizze das Volumen nach unten und nach oben ab. Vergleichen Sie die Abschätzung mit dem Integrationsergebnis.

Aufgabe 6.

Die Menge $G = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ und } x \leq y \leq \sqrt{x}\}$ ist ein kartesischer Normalbereich sowohl bezüglich der x - als auch der y -Achse. Das Integral

$$\iint_G xy \, dG$$

kann also auf zwei Arten berechnet werden. Führen Sie beide Rechnungen durch.

Aufgabe 7.

Setzen Sie für die folgenden Integrationsbereiche G die Grenzen in das Doppelintegral

$$\iint_G f(x, y) \, dG$$

ein, und schreiben Sie dG passend um, also als $dx \, dy$ oder als $dy \, dx$. Ist G sowohl ein kartesischer Normalbereich bezüglich der x - als auch der y -Achse, dann schreiben Sie beide Möglichkeiten auf. Skizzieren Sie die Mengen G .

1. $G = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 5 \text{ und } -2 \leq y \leq x\}$
2. $G = \{(x, y) \mid -2 \leq x \leq 2 \text{ und } -2 \leq y \leq x^2\}$
3. $G = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 2 \text{ und } -1 \leq y \leq x^3\}$
4. $G = \{(x, y) \mid \sqrt{y} \leq x \leq (3 + \sin(\frac{\pi}{2}y)) \text{ und } 0 \leq y \leq 4\}$