

## Tangentialebenen, Doppelintegrale

### Aufgabe 1.

Die Ebene  $4x - 7y - 4z = -18$  sei gegeben. Gesucht sind

1. ein Normalenvektor auf der Ebene,
2. der senkrechte Abstand der Ebene vom Ursprung,
3. die Schnittpunkte der Ebene mit den Koordinatenachsen.

### Aufgabe 2.

Die Funktion  $z = 4x^2y^4 - 3xy$  soll an der Stelle mit  $x_0 = 2$  und  $y_0 = 1/2$  untersucht werden. Gesucht sind

1. der Flächennormalenvektor,
2. die lineare Approximationsformel für  $\Delta z$ ,
3. die Gleichung der Tangentialebene,
4. der senkrechte Abstand der Tangentialebene vom Ursprung,
5. die Schnittpunkte der Tangentialebene mit den Koordinatenachsen.

### Aufgabe 3.

Zur Funktion  $z = \sqrt{2}(1 - x^3)\cos(y)$  ist an der Stelle  $x_0 = 1/2$ ,  $y_0 = \pi/4$  die Tangentialebene und der Flächennormalenvektor gesucht.

### Aufgabe 4.

Berechnen Sie das Integral

$$\int_{y=0}^{\pi/2} \int_{x=0}^6 (x^2 + x \cos(y)) dx dy.$$

### Aufgabe 5.

Die Funktion  $z = (1 - x)e^y$  soll für  $0 \leq x \leq 1$  und  $-1 \leq y \leq 1$  betrachtet werden.

1. Zeichnen Sie eine Skizze.
2. Berechnen Sie das Volumen zwischen der Funktionsfläche und der  $xy$ -Ebene.
3. Schätzen Sie mit Hilfe der Skizze das Volumen nach unten und nach oben ab. Vergleichen Sie die Abschätzung mit dem Integrationsergebnis.

**Aufgabe 6.**

Die Menge  $G = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ und } x \leq y \leq \sqrt{x}\}$  ist ein kartesischer Normalbereich sowohl bezüglich der  $x$ - als auch der  $y$ -Achse. Das Integral

$$\iint_G xy \, dG$$

kann also auf zwei Arten berechnet werden. Führen Sie beide Rechnungen durch.

**Aufgabe 7.**

Setzen Sie für die folgenden Integrationsbereiche  $G$  die Grenzen in das Doppelintegral

$$\iint_G f(x, y) \, dG$$

ein, und schreiben Sie  $dG$  passend um, also als  $dx \, dy$  oder als  $dy \, dx$ . Ist  $G$  sowohl ein kartesischer Normalbereich bezüglich der  $x$ - als auch der  $y$ -Achse, dann schreiben Sie beide Möglichkeiten auf. Skizzieren Sie die Mengen  $G$ .

1.  $G = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 5 \text{ und } -2 \leq y \leq x\}$
2.  $G = \{(x, y) \mid -2 \leq x \leq 2 \text{ und } -2 \leq y \leq x^2\}$
3.  $G = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 2 \text{ und } -1 \leq y \leq x^3\}$
4.  $G = \{(x, y) \mid \sqrt{y} \leq x \leq (3 + \sin(\frac{\pi}{2}y)) \text{ und } 0 \leq y \leq 4\}$