

Höhenlinien, partielle Ableitungen

Aufgabe 1.

Zeichnen Sie ein Höhenliniendiagramm zu der Funktion $f(x, y) = 4 - x + 2y$.

Aufgabe 2.

Geben Sie den Definitions- und den Wertebereich der Funktion $z = \sqrt{y - x^2}$ an; skizzieren Sie das Höhenliniendiagramm.

Aufgabe 3.

Skizzieren Sie die folgenden Funktionen im ersten Oktanten ($x, y, z \geq 0$) des Koordinatensystems; dabei sollen auch die Schnittkurven mit den Koordinatenebenen skizziert werden. Zeichnen Sie außerdem zu jeder Funktion ein Diagramm mit fünf Höhenlinien.

a) $z = 1 - x - y$ b) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ c) $z = x^2 + y^2$

Aufgabe 4.

Berechnen Sie zu den folgenden Funktionen die partiellen Ableitungen 1. Ordnung.

a) $f(x, y) = xy^3 - 7x^2y^4$ b) $z = \sin(x) \cos(y)$ c) $u(r, \varphi) = re^{-\varphi^2}$
d) $z = \frac{1}{1 + x^2 + y^2}$ e) $f(x, y, z) = x^2y + y^2z$ f) $w = (x + z^3)e^{-(x^2+y^2)}$

Aufgabe 5.

Verifizieren Sie $f_{xy} = f_{yx}$ bei den folgenden Funktionen.

a) $f(x, y) = x^3(y^2 - 4x)$ b) $f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^4)$

Aufgabe 6.

Zeigen Sie, daß die folgenden Funktionen $w = f(x, y)$ die Gleichung $w_{xx} + w_{yy} = 0$ (die zweidimensionale *Laplace-Gleichung*) erfüllen.

a) $w = e^{ax} \sin(ay)$ (a konstant) b) $w = \ln(x^2 + y^2)$

Aufgabe 7.

Berechnen Sie zur Funktion $z = x^2 - y^2$ die Gleichung der Tangentialebene im Punkt $P = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, wobei $x_0 = 1$ und $y_0 = -2$ sein soll.

Um wieviel ändert sich z ungefähr, wenn x und y sich jeweils höchstens um 0,02 ändern? In welchem Intervall liegt z dann?