Aufgabe 1

Die Funktion f sei auf dem Intervall $[a, b]$ gegeben und integrierbar. Ferner sei die Funktion φ durch

$$\varphi(x) = (b - a) \cdot f((b - a)x + a)$$

definiert.

(a) Zeigen Sie, daß

$$\int_0^1 \varphi(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx$$

gilt.

(b) Wie kann man das anschaulich mit einer Verschiebung sowie einer Stauchung/Streckung von f erklären?

Aufgabe 2

In der Vorlesung wurde die Keplerregel (Grundform der Simpsonregel) hergeleitet:

$$\int_0^1 f(x)\, dx \approx \frac{1}{6} f(0) + \frac{4}{6} f(1/2) + \frac{1}{6} f(1).$$

Leiten Sie analog zur Vorlesung eine Formel zur numerischen Integration einer Funktion f auf dem Intervall $[0, 1]$ her, die nicht auf der Näherung durch eine Parabel basiert, sondern ein Polynom dritten Grades $p(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3$ als Ersatz für f verwendet.

Diese Regel ist als 3/8-Regel bekannt. Die Werte der Abszissen und Gewichte wurden in der Vorlesung bereits angegeben; damit haben Sie eine Kontrolle, ob Ihre Rechnung richtig ist.

Aufgabe 3

Wollen wir eine Funktion f auf einem Intervall $[a, b]$ näherungsweise integrieren, können wir entweder die Funktion auf das Intervall $[0, 1]$ transformieren, oder unsere Integrationsformeln auf das Intervall $[a, b]$ umschreiben.

Copyright © 2006, Prof. Dr. H.-R. Metz. All rights reserved.

Für die Keplerregel geht das so:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &= \int_0^1 \varphi(x)\,dx \\
&\approx \frac{1}{6}\,\varphi(0) + \frac{4}{6}\,\varphi(1/2) + \frac{1}{6}\,\varphi(1) \\
&= \quad \frac{1}{6}\cdot(b-a)\cdot f((b-a)0+a) \\
&\quad + \frac{4}{6}\cdot(b-a)\cdot f((b-a)(1/2)+a) \\
&\quad + \frac{1}{6}\cdot(b-a)\cdot f((b-a)1+a) \\
&= (b-a)\,\frac{f(a)+4f((a+b)/2)+f(b)}{6}\,.
\end{aligned}$$

Damit haben wir die Keplerregel für ein beliebiges Intervall $[a, b]$.

Die von Ihnen in der vorherigen Aufgabe für das Intervall $[0, 1]$ hergeleitete 3/8-Regel kann entsprechend für ein beliebiges Intervall $[a, b]$ umgeschrieben werden.

Verwenden Sie die Trapezregel, die Keplerregel und die 3/8-Regel, um das Integral der Funktion $f(x) = 1/x$ auf dem Intervall $[1, 4]$ näherungsweise zu berechnen. Vergleichen Sie die Näherungen mit dem exakten Integralwert.

Aufgabe 4

Die Funktion f sei auf dem Intervall $[a, b]$ gegeben und integrierbar. Geben Sie eine Formel für eine Funktion φ an, so daß

$$\int_{-1}^1 \varphi(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

gilt. Sie können sich zunächst anschaulich überlegen, wie man mit einer Verschiebung und anschließender Streckung/Stauchung von f zu φ kommt. Dann sollte exakt gezeigt werden, daß φ die verlangte Eigenschaft besitzt.

Aufgabe 5

Leiten Sie eine offene Newton-Cotes-Quadraturformel der Gestalt

$$\int_{-1}^1 f(x)\,dx \approx w_1 f(-2/3) + w_2 f(0) + w_3 f(2/3)$$

her, indem Sie die Gewichte w_i über die Forderung bestimmen, daß Polynome bis zu einem möglichst hohen Grad exakt integriert werden sollen.

Aufgabe 6

Verwenden Sie die Formel aus der letzten Aufgabe, um das Integral

$$\int_1^4 \frac{1}{x}\,dx$$

näherungsweise zu berechnen. Vergleichen Sie das Ergebniss mit dem exakten Integralwert und den in Aufgabe 3 berechneten Näherungen.