

Differentialgleichungen: numerische Verfahren

Aufgabe 1.

Zeichnen Sie das Richtungsfeld der Differentialgleichung $y' = y - x$ im Bereich $-3 \leq x \leq 3$ und $-2 \leq y \leq 2$.

Bestimmen Sie die speziellen Lösungen, die auf der y -Achse durch 0, -1 und 1 gehen, und zeichnen Sie diese drei Kurven in die Skizze des Richtungsfeldes ein.

Aufgabe 2.

Berechnen Sie näherungsweise die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$y' = -2xy, \quad y(1) = e^{-1}$$

im Intervall $[1; 1, 2]$.

1. Arbeiten Sie mit dem Verfahren von Euler-Cauchy. Verwenden Sie für eine Grobnäherung die Schrittweite $h = 0,2$ und dann für eine Verbesserung die Schrittweite $h = 0,1$. Führen Sie mit Hilfe der beiden Näherungen eine Fehlerabschätzung an $x = 1,2$ durch.
2. Berechnen Sie die exakte Lösung, und vergleichen Sie den exakten mit dem Näherungswert und den geschätzten mit dem realen Fehler.
3. Berechnen Sie dann noch eine Näherung mit dem Verfahren von Heun und der Schrittweite $h = 0,2$. Vergleichen Sie das Ergebnis mit der Näherung durch das Euler-Cauchy-Verfahren und mit dem exakten Wert.

Aufgabe 3.

Lösen Sie näherungsweise die Anfangswertaufgabe

$$y' = -\frac{x}{y}, \quad y(0) = 2$$

im Intervall $[0, 1/2]$ mit Hilfe des klassischen Runge-Kutta-Verfahrens 4. Ordnung.

1. Berechnen Sie einen Grobwert mit der Schrittweite $h = 1/2$ und einen Wert mit der Schrittweite $h = 1/4$. Benutzen Sie die beiden Werte, um eine Fehlerabschätzung an $x = 1/2$ durchzuführen.
2. Berechnen Sie die exakte Lösung, und vergleichen Sie den exakten mit dem Näherungswert und den geschätzten mit dem realen Fehler.