# Differentialgleichungen: Trennung der Veränderlichen

**Aufgabe 1.**
Lösen Sie die Differentialgleichung

$$y' = \cos^2 y\,.$$

**Aufgabe 2.**
Berechnen Sie die Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{u} = e^{-u/2}.$$

**Aufgabe 3.**
Lösen Sie die Differentialgleichung

$$\dot{u} - u^3 = 0$$

mit der Anfangsbedingung $u = 1/2$ für $t = 0$.

**Aufgabe 4.**
Berechnen Sie die Lösung der Differentialgleichung

$$y' - y^2 \sin x = 0$$

mit der Anfangsbedingung $y(0) = 0,25$.

**Aufgabe 5.**
Ein 100-Liter-Tank ist mit einer Salzlösung gefüllt, die 60 Gramm Salz enthält. Nun läßt man pro Minute 2 l Wasser in den Tank laufen, und die durch ständiges Rühren homogen gehaltene Mischung läuft in gleichem Maße aus.

Bezeichnet $s(t)$ die Anzahl der Gramm Salz im Tank nach $t$ Minuten, so beträgt die Konzentration $s(t)/100$ Gramm pro Liter, und für die Änderungsgeschwindigkeit gilt

$$s'(t) = -\frac{2}{100}\,\frac{1}{\mathrm{min}}\,s(t)\,.$$

Wieviel Gramm Salz befinden sich nach einer Stunde noch im Tank, wieviel nach zwei Stunden?

**Aufgabe 6.**
Ein Körper der Anfangstemperatur $T(0) = T_0 = 50°C$ kühlt bei Eintauchen in einen großen Wasserbehälter der konstanten Temperatur $U = 20°C$ innerhalb von

2 Minuten auf $34°C$ ab. Die Funktion $T(t)$, welche den zeitlichen Temperaturverlauf des Körpers beschreibt, genüge dem Newtonschen Abkühlungsgesetz

$$T'(t) = -k\,(T(t) - U)$$

mit einer positiven Konstanten $k$.

Ermitteln Sie die Temperatur des Körpers zum Zeitpunkt $t = 3$ min.

**Aufgabe 7.**
Eine Bakterienpopulation wird der Wirkung eines Toxins $T$ ausgesetzt, wobei die durch $T$ bewirkte Todesrate sowohl proportional der Anzahl $u(t)$ der zum Zeitpunkt $t$ noch lebenden Bakterien wie auch proportional der Menge $T(t)$ des zu dieser Zeit vorhandenen Toxins sei. Die natürliche Vermehrung der Bakterien bei Abwesenheit von $T$ erfolge exponentiell, so daß insgesamt gilt

$$u'(t) = (\gamma - \delta T(t))\,u(t), \qquad \text{mit positiven Konstanten } \gamma \text{ und } \delta.$$

Sei nun $T(t) = at$, mit einer Konstanten $a > 0$.

a) Begründen Sie aus der Differentialgleichung, daß die Bakterienpopulation bis zur Zeit $\gamma/(a\delta)$ noch wachsen, dann aber abnehmen wird.

b) Ermitteln Sie die Lösung der Differentialgleichung für $u(0) = u_0$.