

Laplace-Transformation Rechenregeln

- Neben dem Linearitäts- und Differentiationssatz, die im ersten Skript zur Laplace-Transformation behandelt wurden, gibt es weitere Rechenregeln. Sie können zur Herleitung zusätzlicher Korrespondenzen verwendet werden, wobei bekannte Korrespondenzen auf verschiedene Arten abgeändert werden.

- Satz (**Ähnlichkeitssatz**)

Ist $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, so gilt

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a} \cdot F\left(\frac{s}{a}\right) \quad \text{mit } a > 0.$$

- Anmerkung: $f(at)$ ist eine „ähnliche“ Kurve wie $f(t)$; es ist für $a < 1$ eine Streckung der Kurve von $f(t)$ in t -Richtung und für $a > 1$ eine Stauchung der Kurve von $f(t)$ in t -Richtung.

- Satz (**Verschiebungssatz**)

Ist $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, so gilt

1. $\mathcal{L}\{f(t - t_0)\} = e^{-st_0} \cdot F(s)$ mit $t_0 > 0$,
2. $\mathcal{L}\{f(t + t_0)\} = e^{st_0} \cdot \left[F(s) - \int_0^{t_0} f(t)e^{-st} dt \right]$ mit $t_0 > 0$.

- Anmerkung: In beiden Fällen haben wir eine Verschiebung der Kurve der Funktion $f(t)$ um die Strecke t_0 , zunächst bei $f(t - t_0)$ nach rechts und im zweiten Fall bei $f(t + t_0)$ nach links.

- Satz (**Dämpfungssatz**)

Ist $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, so gilt

$$\mathcal{L}\{e^{-\delta t} f(t)\} = F(s + \delta).$$

- Satz (**Transformation periodischer Funktionen**)

Die Laplace-Transformierte einer *periodischen* Funktion $f(t)$ mit der Periode (Schwingungsdauer) T ist

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \cdot \int_0^T f(t)e^{-st} dt.$$

- Beweise
- Beispiele