Differentialgleichungen: Trennung der Veränderlichen

Aufgabe 1.
Lösen Sie die Differentialgleichung

$$y' = \cos^2 y \,.$$

Aufgabe 2.
Berechnen Sie die Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{u} = e^{-u/2}.$$

Aufgabe 3.
Lösen Sie die Differentialgleichung

$$\dot{u} - u^3 = 0$$

mit der Anfangsbedingung $u = 1/2$ für $t = 0$.

Aufgabe 4.
Berechnen Sie die Lösung der Differentialgleichung

$$y' - y^2 \sin x = 0$$

mit der Anfangsbedingung $y(0) = 0,25$.

Aufgabe 5.
Ein 100-Liter-Tank ist mit einer Salzlösung gefüllt, die 60 Gramm Salz enthält. Nun läßt man pro Minute 2 l Wasser in den Tank laufen, und die durch ständiges Rühren homogen gehaltene Mischung läuft in gleichem Maße aus.

Bezeichnet $s(t)$ die Anzahl der Gramm Salz im Tank nach t Minuten, so beträgt die Konzentration $s(t)/100$ Gramm pro Liter, und für die Änderungsgeschwindigkeit gilt

$$s'(t) = -\frac{2}{100}\,\frac{1}{\text{min}}\,s(t)\,.$$

Wieviel Gramm Salz befinden sich nach einer Stunde noch im Tank, wieviel nach zwei Stunden?

Aufgabe 6.
Ein Körper der Anfangstemperatur $T(0) = T_0 = 50°C$ kühlt bei Eintauchen in einen großen Wasserbehälter der konstanten Temperatur $U = 20°C$ innerhalb von

2 Minuten auf $34°C$ ab. Die Funktion $T(t)$, welche den zeitlichen Temperaturverlauf des Körpers beschreibt, genüge dem Newtonschen Abkühlungsgesetz

$$T'(t) = -k\,(T(t) - U)$$

mit einer positiven Konstanten k.

Ermitteln Sie die Temperatur des Körpers zum Zeitpunkt $t = 3$ min.

Aufgabe 7.

Eine Bakterienpopulation wird der Wirkung eines Toxins T ausgesetzt, wobei die durch T bewirkte Todesrate sowohl proportional der Anzahl $u(t)$ der zum Zeitpunkt t noch lebenden Bakterien wie auch proportional der Menge $T(t)$ des zu dieser Zeit vorhandenen Toxins sei. Die natürliche Vermehrung der Bakterien bei Abwesenheit von T erfolge exponentiell, so daß insgesamt gilt

$$u'(t) = (\gamma - \delta T(t))\,u(t), \qquad \text{mit positiven Konstanten } \gamma \text{ und } \delta.$$

Sei nun $T(t) = at$, mit einer Konstanten $a > 0$.

a) Begründen Sie aus der Differentialgleichung, daß die Bakterienpopulation bis zur Zeit $\gamma/(a\delta)$ noch wachsen, dann aber abnehmen wird.

b) Ermitteln Sie die Lösung der Differentialgleichung für $u(0) = u_0$.