

## Laplace-Transformation

### Rücktransformation

- Für die Rücktransformation aus dem Bild- in den Originalraum verwendet man üblicherweise Tabellen von Korrespondenzen. Notwendig ist dabei die Umformung beziehungsweise Zerlegung der Bildfunktion in solche Ausdrücke, die in den Tabellen stehen.
- Bei gebrochenrationalen Bildfunktionen wird die Methode der Partialbruchzerlegung benutzt, um auf tabellierte Ausdrücke zu kommen.
- **Partialbruchzerlegung**

Wir gehen von einer gebrochenrationalen Bildfunktion

$$F(s) = \frac{Z(s)}{N(s)} = \frac{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}{s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}$$

mit  $n < m$  aus, d.h. der Grad des Zählerpolynoms  $Z(s)$  soll kleiner als der Grad des Nennerpolynoms  $N(s)$  sein. Ist  $n \geq m$ , wird zunächst eine Polynomdivision durchgeführt.

Um diesen Bruch in Teilbrüche zu zerlegen, bestimmt man die Nullstellen  $s_1, s_2, \dots, s_m$  des Nenners  $N(s)$  und schreibt  $N(s)$  als Produkt

$$N(s) = (s - s_1)(s - s_2) \cdot \dots \cdot (s - s_m)$$

seiner Linearfaktoren. Dann ist eine Fallunterscheidung nötig, abhängig von der Art der Nullstellen des Nenners.

- Fall 1: Alle Nullstellen sind reell und einfach.

Man zerlegt  $F(s)$  gemäß

$$F(s) = \frac{C_1}{s - s_1} + \frac{C_2}{s - s_2} + \dots + \frac{C_m}{s - s_m}.$$

Die Berechnung der Konstanten  $C_1, C_2, \dots, C_m$  geschieht in zwei Schritten: Zunächst werden die Brüche auf der rechten Seite der Gleichung zu einem Bruch zusammengefaßt; dann wird ein Koeffizientenvergleich des Zählers der rechten Seite mit dem Zähler der linken Seite durchgeführt.

- Fall 2: Alle Nullstellen sind reell; es gibt mehrfache Nullstellen.

Falls  $s_i$  eine  $p$ -fache Nullstelle ist, werden in der Zerlegung nach Fall 1 alle Terme mit  $C_i/(s - s_i)$  weggelassen; stattdessen wird

$$\frac{C_{i,1}}{s - s_i} + \frac{C_{i,2}}{(s - s_i)^2} + \dots + \frac{C_{i,p}}{(s - s_i)^p}$$

eingesetzt.

- Fall 3: Es gibt einfache komplexe Nullstellen.

Es sei  $s_i$  eine einfache komplexe Nullstelle. Da die Koeffizienten  $b_0, \dots, b_{m-1}$  des Nennerpolynoms alle reell sind, existiert nach einem Satz der Algebra eine zu  $s_i$  konjugiert komplexe Nullstelle  $s_j$ . Also enthält die Zerlegung den Ausdruck

$$\frac{C_i}{s - s_i} + \frac{C_j}{s - s_j},$$

den man besser durch den ausmultiplizierten Term

$$\frac{D_1 s + D_2}{s^2 + a s + b}$$

ersetzt. Hierbei sind  $D_1$  und  $D_2$  unbekannte Konstanten.

- Fall 4: Es gibt mehrfache komplexe Nullstellen.

Für eine Methoden zur Behandlung dieses Falles wird auf die Literatur verwiesen.

- Hat man den Bruch  $Z(s)/N(s)$  in Partialbrüche zerlegt, kann man die Rücktransformation mit Hilfe passender Korrespondenzen durchführen. Dabei unterscheidet man wieder die oben aufgelisteten Fälle.
- zu Fall 1: Wegen  $e^{at} \circ \bullet \frac{1}{s - a}$  und dem Linearitätssatz gilt:

$$\frac{C}{s - a} \bullet \circ C e^{at}.$$

- zu Fall 2: Wir müssen wissen, welche Originalfunktion die Bedingung

$$\frac{C}{(s - a)^k} \bullet \circ ?$$

erfüllt. Mit der elementaren Korrespondenz für  $t^n$  bzw.  $t^{k-1}$ , dem Linearitäts- und dem Dämpfungssatz kann man zeigen, daß

$$\frac{C}{(s - a)^k} \bullet \circ C e^{at} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \quad \text{für } k = 1, 2, \dots$$

gilt.

- zu Fall 3: Mit den elementaren Korrespondenzen für Sinus und Cosinus, dem Linearitäts- und dem Dämpfungssatz kann man zeigen, daß gilt:

$$\frac{Cs + D}{s^2 + as + b} \bullet \text{---} \circ e^{-\delta t} \left( A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t) \right)$$

mit  $\delta = a/2$ ,  $\omega = \sqrt{b - \delta^2} \in \mathbb{R}$ ,  $A = (D - aC/2)/\omega$  und  $B = C$ .

- Beispiele
- Wir betrachten eine weitere Methode die neben der Partialbruchzerlegung bei der Rücktransformation aus dem Bild- in den Originalraum Verwendung findet.

Ist die Bildfunktion ein Produkt  $F(s) = F_1(s) \cdot F_2(s)$ , und sind die Korrespondenzen  $F_1(s) \bullet \text{---} \circ f_1(t)$  und  $F_2(s) \bullet \text{---} \circ f_2(t)$  bekannt, so kann die Originalfunktion zur Bildfunktion  $F(s)$  mit dem Faltungssatz berechnet werden.

- Satz (**Faltungssatz**)

Ist  $F_1(s) \bullet \text{---} \circ f_1(t)$  und  $F_2(s) \bullet \text{---} \circ f_2(t)$ , so gilt für das Produkt  $F_1(s) \cdot F_2(s)$  die Korrespondenz

$$F_1(s) \cdot F_2(s) \bullet \text{---} \circ \int_0^t f_1(u) \cdot f_2(t - u) du.$$

(Ohne Beweis)

- Anmerkung: Man verwendet auch die Schreibweise

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(u) \cdot f_2(t - u) du$$

und bezeichnet die linke Seite als **Faltungsprodukt** und das Integral auf der rechten Seite als **Faltungsintegral**.

Damit kann man den Faltungssatz auch in der Form

$$F_1(s) \cdot F_2(s) \bullet \text{---} \circ f_1(t) * f_2(t)$$

schreiben.

- Beispiele