Reihen

Reihen von Zahlen — Reihen von Funktionen

- Die endliche Summe $a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ wird auch als
$$\sum_{n=1}^{k} a_n$$
geschrieben. Bei systematisch aufgebauten Summanden a_n kann es Formeln zur Berechnung des Summenwertes geben. Ein bekanntes Beispiel wird dem jungen Gauß zugeschrieben.

- Satz (Gaußsche Summenformel)

  Es gilt:
$$\sum_{n=1}^{k} n = \frac{k(k+1)}{2}\,.$$

- Geht man — anschaulich gesprochen — von einer endlichen Summe zu einer unendlichen Summe über, so erhält man eine Reihe.

- Definition

  Ist $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge, so heißt der Ausdruck
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$
eine ***Reihe***. Die a_n heißen die ***Glieder*** der Reihe.

- Anmerkung: Die Ausführung unendlich vieler Additionen ist nicht möglich. Wir betrachten deshalb die Folge (s_m) der endlichen ***Partialsummen***
$$s_m = \sum_{n=1}^{m} a_n.$$

- Definition

  Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt ***konvergent*** zur Summe s, wenn die Folge $(s_m)_{m=1}^{\infty}$ der Partialsummen $s_m = \sum_{n=1}^{m} a_n$ gegen s konvergiert, d.h. wenn der Grenzwert $\lim_{m\to\infty} s_m = s$ existiert.

  Schreibweise: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$.

  Die Reihe heißt ***divergent***, wenn die Folge (s_m) keinen endlichen Grenzwert besitzt.

- Beispiele: harmonische Reihe, geometrische Reihe.
- Satz

  Die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ ist für $|q| < 1$ konvergent und für $|q| \geq 1$ divergent. Es gilt
  $$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \quad \text{für} \quad |q| < 1.$$
- Anmerkung: Durch $\sum_{n=0}^{\infty} c\, q^n = c/(1-q)$ für $|q| < 1$ hat man eine einfache Verallgemeinerung; c ist dabei eine beliebige Konstante.
- Beweis
- Anmerkung: Der Beweis liefert auch eine Formel für die Berechnung endlicher geometrischer Reihen.
- Satz

  Es gilt
  $$\sum_{n=0}^{m} q^n = \frac{1-q^{m+1}}{1-q}$$
  für beliebige Werte von q.
- Beispiele
- Anmerkung: Eine sehr anschauliche Methode, die Divergenz oder Konvergenz einer unendlichen Reihe zu zeigen, liefert das ***Integralkriterium***.
- Beispiele: Nachweis der Divergenz der harmonischen Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ und der Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ mit Hilfe des Integralkriteriums.
- Anmerkung: Man kann mit dem Integralkriterium sehr einfach zeigen, daß die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^c$ für jeden Exponenten $c > 1$ konvergiert. Wesentlich schwieriger ist es, Formeln für die Grenzwerte zu bekommen; für geradzahlige c, also für $c = 2, 4, 6, \ldots$, sind solche Ausdrücke seit Euler bekannt.
- Beispiele für konvergente nicht-geometrische Reihen und ihre Grenzwerte (ohne Herleitung).
  $$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - + \cdots = \frac{\pi}{4}$$
  $$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots = e$$
  $$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$
  $$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - + \cdots = \ln 2$$

- Definition

  Habe wir unendlich viele durchnumerierte Funktionen $f_1, f_2, \ldots$, die alle auf derselben Teilmenge M der reellen Zahlen definiert sind, dann nennen wir

  $$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$$

  eine ***Funktionenreihe*** auf M.

  Konvergiert für jedes $x \in M$ die Zahlenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, dann wird durch

  $$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \qquad (x \in M)$$

  auf M die ***Grenzfunktion*** f der Funktionenreihe definiert, und wir sagen, daß die Funktionenreihe auf M ***punktweise konvergent*** gegen f ist.

- Anmerkung: Wie bei Folgen von Funktionen müssen sich auch bei punktweise konvergenten Funktionenreihen die Eigenschaften der Summanden $f_1, f_2, \ldots$ keineswegs auf die Grenzfunktion übertragen.

- Beispiel: Die Reihe der Funktionen $f_n(x) = x^n$ ist auf dem Intervall $(-1, 1)$ punktweise konvergent, und es gilt

  $$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \qquad (x \in (-1, 1)).$$

- Beispiel: Für $s > 1$ ist durch

  $$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

  die Riemannsche Zetafunktion definiert. Sie kann in die komplexe Ebene „analytisch fortgesetzt“ werden. Die *Riemannsche Vermutung*, daß die nichttrivialen Nullstellen alle den Realteil 1/2 haben, ist das berühmteste ungelöste Problem der Mathematik.