Differentialgleichungen

Ordnungsreduktion — Runge-Kutta-Verfahren für Systeme

- Beispiel: Umschreiben einer expliziten Differentialgleichung höherer Ordnung in ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung.

- Satz

  Jede explizite Differentialgleichung n-ter Ordnung

  $$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

  läßt sich als ein System von n expliziten Differentialgleichungen 1. Ordnung schreiben.

- Beweis

- Anmerkung: Die Methode des Umschreibens wird als ***Ordnungsreduktion*** bezeichnet. Sie kann auch auf Systeme übertragen werden.

- Satz

  Jedes System aus n expliziten Differentialgleichungen m-ter Ordnung läßt sich als System von $n \cdot m$ expliziten Differentialgleichungen 1. Ordnung schreiben.

- Beweis

- Beispiel: Bewegungsgleichungen linear gekoppelter Massenpunkte.

- Anmerkung: Mit der Methode der Ordnungsreduktion kann man explizite Differentialgleichungen — sowohl einzelne als auch Systeme — von beliebiger Ordnung so umschreiben, daß explizite Systeme 1. Ordnung entstehen. Können wir diese lösen, dann haben haben wir somit ein sehr mächtiges Verfahren, das auf eine große Klasse von Problemstellungen anwendbar ist.

  Wir werden im folgenden das Runge-Kutta-Verfahren auf explizite Systeme 1. Ordnung übertragen. Damit sind dann Anfangswertaufgaben 1. Ordnung, und indirekt aufgrund der Ordnungsreduktion auch höherer Ordnung, numerisch lösbar.

- Das ***Runge-Kutta-Verfahren für Systeme*** von expliziten Differentialgleichungen 1. Ordnung

- Beispiel: Die anschaulichen Ideen des Euler-Cauchy-Verfahrens, des Heun-Verfahrens und schließlich des Runge-Kutta-Verfahrens werden übertragen auf das spezielle System

$$
\begin{aligned}
y' &= f(x,y,z), \quad y(x_0) = y_0 \\
z' &= g(x,y,z), \quad z(x_0) = z_0
\end{aligned}
$$

  aus zwei Differentialgleichungen mit Anfangsbedingungen.

- Allgemeine Problemstellung: Die Anfangswertaufgabe (AWA)

$$\vec{y}\,'(x) = \vec{f}(x,\vec{y}), \qquad \vec{y}(x_0) = \vec{a}$$

  soll numerisch gelöst werden. Hat das System die Ordnung n, dann sind n Polygonzüge als Näherungen für die n exakten Lösungskurven gesucht.

- Iterationsvorschrift des Runge-Kutta-Verfahrens.

  Wir starten an der Stelle x_0 und berechnen Näherungen an $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_0 + 2h, \ldots, x_i = x_0 + i \cdot h, \ldots$ Dabei ist h die Schrittweite.

  Die exakte Lösung der AWA an der Stelle x_i ist $\vec{y}(x_i)$, die Näherung bezeichnen wir mit $\vec{y}_i$. Bei einem System n-ter Ordnung besteht dieser Vektor aus den n Näherungen für die n exakten Werte. Der Vektor $\vec{y}_0$ enthält die Anfangswerte.

  Die Berechnung von $\vec{y}_{i+1}$ erfolgt durch die Vorschrift

$$\vec{y}_{i+1} = \vec{y}_i + \frac{1}{6}\left(\vec{k}_{i,1} + 2\vec{k}_{i,2} + 2\vec{k}_{i,3} + \vec{k}_{i,4}\right)$$

  mit

$$
\begin{aligned}
\vec{k}_{i,1} &= h \cdot \vec{f}(x_i, \vec{y}_i), \\
\vec{k}_{i,2} &= h \cdot \vec{f}\left(x_i + \frac{h}{2}, \vec{y}_i + \frac{\vec{k}_{i,1}}{2}\right), \\
\vec{k}_{i,3} &= h \cdot \vec{f}\left(x_i + \frac{h}{2}, \vec{y}_i + \frac{\vec{k}_{i,2}}{2}\right), \\
\vec{k}_{i,4} &= h \cdot \vec{f}\left(x_i + h, \vec{y}_i + \vec{k}_{i,3}\right).
\end{aligned}
$$

- Anmerkung: Analog zum Runge-Kutta-Verfahren für eine einzelne Differentialgleichung ist eine Fehlerabschätzung möglich.

- Beispiele