Differentialgleichungen

Anwendungsbeispiele zu linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

- Beispiel: Mathematisches Pendel.

- Beispiel: Mechanische Schwingung.

  Eine Masse schwingt in x-Richtung unter dem Einfluß einer Federkraft und einer Dämpfung. Der zeitabhängige Ort $x = x(t)$ der Masse wird durch eine Differentialgleichung beschrieben.

- Beispiel: Elektrischer Reihenschwingkreis.

  Ein ohmscher Widerstand, ein Kondensator und eine Spule sind hintereinander geschaltet. Zunächst ist ein Schalter geöffnet, und der Kondensator wird aufgeladen. Wird der Schalter geschlossen, fließt ein Strom. Für die Funktion der zeitabhängigen Stromstärke $i = i(t)$ stellen wir eine Differentialgleichung auf.

- Beispiel: Elektrischer Parallelschwingkreis.

  Ein ohmscher Widerstand, ein Kondensator und eine Spule sind parallel geschaltet. Ein Schalter ist geöffnet, der Kondensator wird aufgeladen, dann wird der Schalter geschlossen. Die zeitabhängige Spannung $u = u(t)$ wird durch eine Differentialgleichung beschrieben.

- Freie gedämpfte Schwingung.

  Anstelle der Differentialgleichungen aus den letzten drei Beispielen betrachten wir zusammenfassend $a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$. Bei Bedarf können wir a, b und c durch die konkreten Größen aus einem der Beispiele ersetzen.

  Bei der Lösung der charakteristischen Gleichung führt man üblicherweise die folgenden Bezeichnungen ein, die im Hinblick auf die Anwendungen gewählt sind. Es ist

  $$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

  mit der Abklingkonstanten δ und der Kennkreisfrequenz ω_0. Für $\delta < \omega_0$ ist

  $$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = -\delta \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = -\delta \pm j\omega_d$$

  mit der Eigenkreisfrequenz ω_d. Hierbei bezeichnet j die imaginäre Einheit.