

Differentialgleichungen

Beispiele zu hom. lin. Dgln. 2. Ordn. mit konst. Koeffizienten

- Aus der Differentialgleichung $y'' + p y' + q y = 0$ erhält man mit dem Exponentialansatz $y = e^{\lambda x}$ die charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 + p \lambda + q = 0.$$

Abhängig von ihren Nullstellen λ_1 und λ_2 ergeben sich drei Lösungsfälle.

1. λ_1, λ_2 reell und $\lambda_1 \neq \lambda_2$: $y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$
 2. λ_1, λ_2 komplex mit $\lambda_{1,2} = k \pm i\omega$: $y(x) = e^{kx} (C_1 \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x))$
 3. λ_1, λ_2 reell und $\lambda_1 = \lambda_2$: $y(x) = (C_1 + C_2 x) e^{\lambda_1 x}$
- Beispiel: $y'' - 3y' - 10y = 0$.
 - Beispiel: $y'' - 6y' + 25y = 0$.
 - Beispiel: $y'' - 4y' + 4y = 0$.
 - Sind zusätzlich zu einer Differentialgleichung 2. Ordnung noch zwei Anfangsbedingungen gegeben, dann werden damit Werte berechnet, die den beiden Parametern der allgemeinen Lösung zugewiesen werden. Man erhält eine spezielle Lösung.
 - Beispiel: Die Anfangswertaufgabe bestehend aus der Differentialgleichung

$$100 \ddot{x} + 160 \dot{x} + 964 x = 0$$

und den Anfangsbedingungen

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 12.$$

- Beispiel: $100 \ddot{x} + 160 \dot{x} + 964 x = 0$ mit $x(0) = 15$ und $\dot{x}(0) = 0$.
- Satz
Die Lösung einer Anfangswertaufgabe

$$y'' + p y' + q y = 0, \quad y(x_0) = A, \quad y'(x_0) = B$$

ist eindeutig.

- Beweisidee