Komplexe Zahlen

Polare Arithmetik

- Satz

  Ist $z = re^{i\varphi}$, so gilt $\overline{z} = re^{-i\varphi}$.

- Beweis

- Satz (Multiplikation in trigonometrischer und Exponentialdarstellung)

  Für $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1} = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ und $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2} = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ gilt

  $$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} = r_1 r_2 \Big(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\Big),$$

  d.h. die Beträge werden multipliziert,

  $$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

  und die Winkel addiert,

  $$\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2).$$

- Beweis

- Veranschaulichung in der komplexen Ebene.

- Spezialfall: Multiplikation mit i gibt eine Drehung um 90°.

- Berechnung und Skizze.

- Satz (Division in trigonometrischer und Exponentialdarstellung)

  Für $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1} = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ und $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2} = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ mit $z_2 \neq 0$ gilt

  $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\, e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}\Big(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\Big),$$

  d.h. die Beträge werden dividiert,

  $$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

  und die Winkel subtrahiert,

  $$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2).$$

- Anmerkung: Speziell ist $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}\, e^{-i\varphi}$ für jedes $z \neq 0$.
- Beweis
- Veranschaulichung in der komplexen Ebene.
- Spezialfall: Division durch i gibt eine Drehung um $-90°$.
- Berechnung und Skizze.
- Definition

  Eine Lösung z der Gleichung $z^n = a$ mit z, $a \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$ heißt n-te ***Wurzel*** aus a.

  Im Spezialfall $a = 1$ nennt man die Lösungen von $z^n = 1$ die n-ten ***Einheitswurzeln***.
- Satz

  Die n-ten Einheitswurzeln liegen alle auf dem Einheitskreis und bilden die Ecken eines regelmäßigen n-Ecks, von dem eine Ecke im Punkt $z = 1$ liegt, d.h. es sind die Zahlen

  $$z_k = e^{i(2\pi/n)k} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$
- Skizze
- Beweis
- Satz

  Für $a \neq 0$, $a = a_0 e^{i\alpha}$ mit $a_0 = |a|$ und $\alpha = \arg(a)$ und für $n \in \mathbb{N}$ hat die Gleichung $z^n = a$ genau n verschiedene Lösungen (Wurzeln)

  $$z_k = \sqrt[n]{a_0} \cdot e^{i\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}\, k\right)} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$
- Anmerkung: Die Lösungen von $z^n = a$ bilden die Ecken eines regelmäßigen n-Ecks auf dem Kreis mit dem Radius $\sqrt[n]{|a|}$. Der Vektor vom Ursprung zu einer der Ecken bildet den Winkel $\arg(a)/n$ mit der positiven reellen Achse.
- Beweis