

Komplexe Zahlen

Konjugiert komplexe Zahlen, Beträge, Polarkoordinaten

- Definition

Für $z = a + bi$ heißt

$$\bar{z} = a - bi$$

die zu z **konjugiert komplexe** Zahl.

- Anmerkung: Statt \bar{z} schreibt man auch z^* .
- Skizze und Beispiele.
- Satz (Eigenschaften konjugiert komplexer Zahlen)

Für $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt:

(a) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2,$

(b) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2,$

(c) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \quad (z_2 \neq 0),$

(d) $\overline{\bar{z}} = z,$

(e) $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}).$

- Beweis
- Definition

Zu $z = a + bi$ heißt die reelle Zahl

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

der **Betrag** von z .

- Skizze und Beispiele.
- Satz (Eigenschaften des Betrages)

Für $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt:

(a) $|z| \geq 0,$

(b) $|z| = 0$ genau dann, wenn $z = 0,$

(c) $|z| = |\bar{z}|,$

(d) $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$,

(e) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

- Anmerkung: Aus $\sqrt{z \cdot \bar{z}} = |z|$ folgt durch Quadrieren $z \cdot \bar{z} = |z|^2$, woraus sich unmittelbar $z \cdot \bar{z} \in \mathbb{R}$ und $z \cdot \bar{z} \geq 0$ ergibt.

Eine Anwendung haben wir bei der Division komplexer Zahlen. Ist der Nenner gleich $z \neq 0$, wird mit der konjugiert komplexen Zahl \bar{z} erweitert, und der neue Nenner $z \cdot \bar{z}$ ist reell. Wegen $z \neq 0$ ist er außerdem echt größer Null.

- Beweis
- Polarkoordinaten r, φ für eine Zahl $z \in \mathbb{C}, z \neq 0$.
- Definition

Zur komplexen Zahl $z \neq 0$ heißt

$$z = r(\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))$$

die **trigonometrische Darstellung** von z . Der Winkel φ heißt **Argument** von z ,

$$\varphi = \arg(z).$$

- Beispiele
- Umrechnungen zwischen cartesischen und polaren Koordinaten.