

## Reihen: Taylorreihen

### Aufgabe 1.

Die Kurve der Funktion  $y = 1/\cos(x)$  soll in der Umgebung von  $x = 0$  durch eine Parabel angenähert werden. Berechnen Sie dazu für  $y = 1/\cos(x)$  die Taylorreihenentwicklung um den Nullpunkt bis zum  $x^2$ -Term.

### Aufgabe 2.

Berechnen Sie zur Funktion  $f(x) = 1/(1+x^2)$  das Taylorpolynom zweiten Grades mit dem Entwicklungspunkt  $x_0 = 0$ , d.h. nähern Sie die Kurve von  $f$  in der Umgebung von  $x_0 = 0$  durch eine Parabel an. Skizzieren Sie die Funktion  $f$  und die Näherung.

### Aufgabe 3.

Die Funktion  $f(x) = \sqrt{x}$  soll in eine Taylorreihe um den Punkt  $x = 1$  entwickelt werden. (Berechnen Sie nur die Terme bis  $(x - 1)^4$ .)

### Aufgabe 4.

Berechnen Sie zu  $y = (1 + x)^\alpha$  mit  $\alpha \in \mathbb{R}$  die ersten vier Glieder der Taylorreihe mit der Entwicklungsmittelpunkt  $x = 0$ . Betrachten Sie das Ergebniss mit speziellen Werten für  $\alpha$ , beispielsweise  $\alpha = 2$  oder  $\alpha = -1$ . Welche Formeln entstehen?

### Aufgabe 5.

Es seien zwei voneinander verschiedene Funktionen  $f$  und  $g$  gegeben, für die  $f(0) = 0$  und  $g(0) = 1$  gilt, und deren Ableitungen die Gleichungen  $f' = g$  und  $g' = f$  erfüllen. (Sie können die folgenden Aufgabenstellungen mit ausschließlich diesen Informationen lösen!)

1. Entwickeln Sie die Funktionen in Taylorreihen mit dem Nullpunkt als Entwicklungsmittelpunkt.
2. Finden Sie Darstellungen von  $f$  und von  $g$  durch elementare Funktionen, indem Sie für  $f$  und  $g$  jeweils eine Differentialgleichung aufstellen und lösen.
3. Berechnen Sie erneut die Taylorreihen von  $f$  und  $g$ , indem Sie die gewonnenen Darstellungen durch elementare Funktionen verwenden: Setzen Sie die Taylorreihen der elementaren Funktionen ein, und fassen Sie Terme zusammen, als würden Sie mit Polynomen rechnen.
4. Wie werden die Funktionen  $f$  und  $g$  üblicherweise bezeichnet?