Komplexe Zahlen: polare Darstellung

Aufgabe 1.
Geben Sie zu den folgenden Zahlen die trigonometrische Form und die Exponentialdarstellung an.

a) $z = 1 + i$ b) $z = -i$ c) $z = 5$ d) $z = -7$ e) $z = 3i$ f) $z = 3 - 3i$

Aufgabe 2.
Schreiben Sie die folgenden Zahlen in die cartesische Form um.

a) $z = 6\,e^{i\,2\pi/3}$ b) $z = 5\,e^{i\,\pi}$ c) $z = 7\,e^{i\,2\pi}$ d) $z = 2\,e^{-i\,\pi/4}$

e) $z = 4\,e^{i\,\pi/6}$ f) $z = -3\,e^{i\,\pi/2}$ g) $z = e^{i\,\pi}$ h) $z = e^{-i\,\pi}$

Aufgabe 3.
Gegeben sind $z_1 = 3 + 4j$ und $z_2 = -8 - 6j$. Berechnen Sie zunächst die trigonometrische Form und die Exponentialdarstellung und dann $z_1 \cdot z_2$ und z_1/z_2.

Aufgabe 4.
Gegeben sei die komplexe Zahl $z = \sqrt{3} + i$. Berechnen Sie Betrag und Argument von z, und geben Sie die trigonometrische Form sowie die Exponentialdarstellung von z an. Berechnen Sie damit z^{10}.

Aufgabe 5.
Mit dem komplexen Zeiger $\underline{z} = 1 + 2j$ werden folgende Operationen durchgeführt:
a) $j \cdot \underline{z}$ b) $\underline{z}^*$ c) $\underline{z}/j$ d) $2 \cdot \underline{z}$ e) $e^{j\,30^\circ} \cdot \underline{z}$ f) $|\,\underline{z}\,|$ g) $\underline{z}^2$
Stellen Sie diese Operationen in der Gaußschen Zahlenebene bildlich dar. Was bedeuten sie geometrisch?

Aufgabe 6.
Es sei $z_2 = z_1 \cdot (q + jq)$ mit $q \in \mathbb{R}$ und $q > 0$. Geben Sie ein $z_1 \in \mathbb{C}$ an, so daß $\arg(z_2) = 135^\circ$ ist.

Aufgabe 7.
Geben Sie sämtliche Wurzeln der Gleichung $z^6 = 1$ an.

Aufgabe 8.
Berechnen und zeichnen Sie alle Werte der Wurzeln $\sqrt[3]{1}$, $\sqrt[4]{1}$, $\sqrt[5]{1}$ und $\sqrt[4]{4i}$. Zeichnen Sie für einen der Werte von $\sqrt[4]{4i}$ auch $(\sqrt[4]{4i})^2$ und $(\sqrt[4]{4i})^3$.

Aufgabe 9.
Für welche reellen Zahlen a und b gilt

$$\frac{a+40j}{9+bj} = 2\sqrt{2} \cdot e^{j\pi/4} \qquad ?$$

Aufgabe 10.
Sei $k > 0$ eine reelle Konstante. Geben Sie eine komplexe Zahl z an, so daß gilt:

$$\arg(z \cdot (k + jk)) = 315° \qquad (j\text{: imaginäre Einheit}).$$

Aufgabe 11.
Berechnen Sie zu der komplexen Zahl

$$z = \frac{9 - aj}{(2+j)(3+j)} + 4b \cdot e^{\frac{\pi}{6}j}$$

den Realteil $\mathrm{Re}(z)$ und den Imaginärteil $\mathrm{Im}(z)$.