Laplace-Transformation

Rücktransformation

- Für die Rücktransformation aus dem Bild- in den Originalraum verwendet man üblicherweise Tabellen von Korrespondenzen. Notwendig ist dabei die Umformung beziehungsweise Zerlegung der Bildfunktion in solche Ausdrücke, die in den Tabellen stehen.

- Bei gebrochenrationalen Bildfunktionen wird die Methode der Partialbruchzerlegung benutzt, um auf tabellierte Ausdrücke zu kommen.

- ***Partialbruchzerlegung***

  Wir gehen von einer gebrochenrationalen Bildfunktion

  $$F(s) = \frac{Z(s)}{N(s)} = \frac{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0}{s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}$$

  mit $n < m$ aus, d.h. der Grad des Zählerpolynoms $Z(s)$ soll kleiner als der Grad des Nennerpolynoms $N(s)$ sein. Ist $n \geq m$, wird zunächst eine Polynomdivision durchgeführt.

  Um diesen Bruch in Teilbrüche zu zerlegen, bestimmt man die Nullstellen s_1, s_2, …, s_m des Nenners $N(s)$ und schreibt $N(s)$ als Produkt

  $$N(s) = (s - s_1)(s - s_2) \cdot \ldots \cdot (s - s_m)$$

  seiner Linearfaktoren. Dann ist eine Fallunterscheidung nötig, abhängig von der Art der Nullstellen des Nenners.

- Fall 1: Alle Nullstellen sind reell und einfach.

  Man zerlegt $F(s)$ gemäß

  $$F(s) = \frac{C_1}{s - s_1} + \frac{C_2}{s - s_2} + \ldots + \frac{C_m}{s - s_m} .$$

  Die Berechnung der Konstanten C_1, C_2, …, C_m geschieht in zwei Schritten: Zunächst werden die Brüche auf der rechten Seite der Gleichung zu einem Bruch zusammengefaßt; dann wird ein Koeffizientenvergleich des Zählers der rechten Seite mit dem Zähler der linken Seite durchgeführt.

- Fall 2: Alle Nullstellen sind reell; es gibt mehrfache Nullstellen.

  Falls s_i eine p-fache Nullstelle ist, werden in der Zerlegung nach Fall 1 alle Terme mit $C_i/(s-s_i)$ weggelassen; stattdessen wird

  $$\frac{C_{i,1}}{s-s_i} + \frac{C_{i,2}}{(s-s_i)^2} + \ldots + \frac{C_{i,p}}{(s-s_i)^p}$$

  eingesetzt.

- Fall 3: Es gibt einfache komplexe Nullstellen.

  Es sei s_i eine einfache komplexe Nullstelle. Da die Koeffizienten $b_0, \ldots, b_{m-1}$ des Nennerpolynoms alle reell sind, existiert nach einem Satz der Algebra eine zu s_i konjugiert komplexe Nullstelle s_j. Also enthält die Zerlegung den Ausdruck

  $$\frac{C_i}{s-s_i} + \frac{C_j}{s-s_j},$$

  den man besser durch den ausmultiplizierten Term

  $$\frac{D_1 s + D_2}{s^2 + as + b}$$

  ersetzt. Hierbei sind D_1 und D_2 unbekannte Konstanten.

- Fall 4: Es gibt mehrfache komplexe Nullstellen.

  Für eine Methoden zur Behandlung diese Falles wird auf die Literatur verwiesen.

- Hat man den Bruch $Z(s)/N(s)$ in Partialbrüche zerlegt, kann man die Rücktransformation mit Hilfe passender Korrespondenzen durchführen. Dabei unterscheidet man wieder die oben aufgelisteten Fälle.

- zu Fall 1: Wegen $e^{at} \circ\!\!-\!\!\bullet\ 1/(s-a)$ und dem Linearitätssatz gilt:

  $$\frac{C}{s-a} \bullet\!\!-\!\!\circ\ Ce^{at}.$$

- zu Fall 2: Wir müssen wissen, welche Originalfunktion die Bedingung

  $$\frac{C}{(s-a)^k} \bullet\!\!-\!\!\circ\ ?$$

  erfüllt. Mit der elementaren Korrespondenz für t^n bzw. t^{k-1}, dem Linearitäts- und dem Dämpfungssatz kann man zeigen, daß

  $$\frac{C}{(s-a)^k} \bullet\!\!-\!\!\circ\ Ce^{at}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \quad \text{für } k = 1, 2, \ldots$$

  gilt.

- zu Fall 3: Mit den elementaren Korrespondenzen für Sinus und Cosinus, dem Linearitäts- und dem Dämpfungssatz kann man zeigen, daß gilt:

$$\frac{Cs + D}{s^2 + as + b} \;\bullet\!\!-\!\!\circ\; e^{-\delta t}\Big(A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)\Big)$$

mit $\delta = a/2$, $\omega = \sqrt{b - \delta^2} \in \mathbb{R}$, $A = (D - aC/2)/\omega$ und $B = C$.

- Beispiele

- Wir betrachten eine weitere Methode die neben der Partialbruchzerlegung bei der Rücktransformation aus dem Bild- in den Originalraum Verwendung findet.

  Ist die Bildfunktion ein Produkt $F(s) = F_1(s) \cdot F_2(s)$, und sind die Korrespondenzen $F_1(s) \bullet\!\!-\!\!\circ f_1(t)$ und $F_2(s) \bullet\!\!-\!\!\circ f_2(t)$ bekannt, so kann die Originalfunktion zur Bildfunktion $F(s)$ mit dem Faltungssatz berechnet werden.

- Satz (***Faltungssatz***)

  Ist $F_1(s) \bullet\!\!-\!\!\circ f_1(t)$ und $F_2(s) \bullet\!\!-\!\!\circ f_2(t)$, so gilt für das Produkt $F_1(s) \cdot F_2(s)$ die Korrespondenz

$$F_1(s) \cdot F_2(s) \;\bullet\!\!-\!\!\circ\; \int_0^t f_1(u) \cdot f_2(t - u)\, du.$$

  (Ohne Beweis)

- Anmerkung: Man verwendet auch die Schreibweise

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(u) \cdot f_2(t - u)\, du$$

  und bezeichnet die linke Seite als ***Faltungsprodukt*** und das Integral auf der rechten Seite als ***Faltungsintegral***.

  Damit kann man den Faltungssatz auch in der Form

$$F_1(s) \cdot F_2(s) \;\bullet\!\!-\!\!\circ\; f_1(t) * f_2(t)$$

  schreiben.

- Beispiele