Laplace-Transformation

Anwendungen: Differentialgleichungen, Übertragungsvorgänge

- Beispiel: Gegeben sei die ***lineare Anfangswertaufgabe mit konstanten Koeffizienten***

  $$\dot{x} + 3x = 0, \quad x(0) = 5.$$

  Wir berechnen die Lösung mit Hilfe der Laplace-Transformation in folgenden Schritten.

  1. Schritt: Transformation der Differentialgleichung.
  2. Schritt: Auflösen nach $\mathcal{L}\{x\}$.
  3. Schritt: Rücktransformation.

- Prinzip:

  – Gegeben sind eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten sowie Anfangsbedingungen.
  – Durch Anwendung der Laplace-Transformation kommt man vom Originalraum in den Bildraum.
  – Man erhält eine algebraische Gleichung für die Transformierte der Lösungsfunktion.
  – Die algebraische Gleichung wird gelöst.
  – Durch Rücktransformation der Lösung kommt man vom Bildraum zurück in den Originalraum.
  – Man hat die spezielle Lösung der Differentialgleichung, d.h. die Lösung der Anfangswertaufgabe.

- Anmerkung: Die Rücktransformation aus dem Bild- in den Originalraum geschieht üblicherweise mit *Tabellen von Korrespondenzen* aus Formelsammlungen. Um diese verwenden zu können, wird die Bildfunktion zunächst in Ausdrücke umgeformt, die in den Tabellen stehen.

  Dabei ist der folgende Satz über die Linearität der Rücktransformation nützlich.

- Satz

  Die inverse Laplace-Transformation (Rücktransformation) ist linear, d.h. es gilt

  $$\mathcal{L}^{-1}\{aF(s) + bG(s)\} = a\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + b\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$$

  mit Konstanten a und b.

- Beweis
- Beispiel: Die spezielle Lösung der Differentialgleichung $\ddot{x} + 9x = 0$ mit den Anfangsbedingungen $x(0) = 7$ und $\dot{x}(0) = -15$ wird berechnet.
- Beispiel: Ein spezieller ***elektrischer Vierpol*** wird verwendet, um die Anwendung der Laplacetransformation auf Übertragungsvorgänge zu demonstrieren.

  Gegeben ist dabei der Vierpol zusammen mit der Eingangsspannung u_e. Gesucht ist die Ausgangsspannung u_a.

  Es zeigt sich, daß die durch

  $$G(s) = \frac{\mathcal{L}\{u_a\}}{\mathcal{L}\{u_e\}}$$

  definierte ***Übertragungsfunktion*** $G(s)$ eine wesentliche Rolle spielt. $G(s)$ ist *charakteristisch für den Vierpol*, d.h. unabhängig von u_e und u_a.
- Prinzip: Ein System (z.B. eine elektrische Schaltung) zur Übertragung von Signalen (z.B. Spannungen) wird durch eine ***Übertragungsfunktion*** $G(s)$ charakterisiert. Für Eingangssignale $f_e(t)$ und Ausgangssignale $f_a(t)$ gilt

  $$\mathcal{L}\{f_a(t)\} = G(s) \cdot \mathcal{L}\{f_e(t)\}$$

  beziehungsweise

  $$\frac{\mathcal{L}\{f_a(t)\}}{\mathcal{L}\{f_e(t)\}} = G(s).$$

  Ist für ein System die Übertragungsfunktion $G(s)$ bekannt, muß zur Bestimmung von f_a lediglich

  1. $\mathcal{L}\{f_e(t)\}$,
  2. $G(s) \cdot \mathcal{L}\{f_e(t)\}$,
  3. $\mathcal{L}^{-1}\{G(s) \cdot \mathcal{L}\{f_e(t)\}\}$

  berechnet werden.