Laplace-Transformation

Laplace-Integral, grundlegende Eigenschaften, Korrespondenzen

- Begriff der Transformation und Rücktransformation einer Funktion.
- Im folgenden sei $f(t) = 0$ für $t < 0$. Wir bezeichnen $t = 0$ als den Einschaltzeitpunkt.
- Definition (Laplace-Transformation)

  Die ***Laplace-Transformierte*** $F(s)$ zur Funktion $f(t)$ ist

  $$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt.$$

  Schreibweise: $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ oder $F(s)$ •—○ $f(t)$.

  Paare von Funktionen $f(t)$ und $F(s)$ mit $f(t)$ ○—• $F(s)$ heißen ***Korrespondenzen***. Dabei wird $f(t)$ als *Zeitfunktion* oder *Originalfunktion* bezeichnet; F(s) wird *Bildfunktion* genannt.
- Schematische Skizze.
- Anmerkung:
  1. Allgemein ist $s \in \mathbb{C}$. Wir haben im folgenden meistens $s \in \mathbb{R}$.
  2. Das Integral existiert nur unter bestimmten Bedingungen an die Funktion f (unter anderem: nicht „zu starkes Wachstum“ für $t \to \infty$).
  3. Die Laplace-Transformation bildet die Mengen der Original- und der Bildfunktionen ***eineindeutig*** aufeinander ab.
  4. Problemstellung der ***Rücktransformation***: Gegeben ist $F(s)$. Gesucht ist das eindeutig existierende $f(t)$, so daß $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$.
     Schreibweise: $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$.
- Beispiel: $f(t) = 1$ für $t \geq 0$.
- Beispiel: $f(t) = t$ für $t \geq 0$.
- Beispiel: $f(t) = e^{at}$ für $t \geq 0$ mit a konstant.

- Satz (***Linearitätssatz***)

  Es gilt

  1. $\mathcal{L}\{k \cdot f(t)\} = k \cdot \mathcal{L}\{f(t)\}$, mit k konstant;
  2. $\mathcal{L}\{f(t) + g(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} + \mathcal{L}\{g(t)\}$.

- Anmerkung: Zusammenfassend geschrieben heißt das

  $$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\}$$

  mit Konstanten a und b.

- Satz (***Differentiationssatz***)

  Es gilt

  1. $\mathcal{L}\{f'(t)\} = s \cdot \mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$,
  2. $\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2 \cdot \mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)$,
  3. $\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n\mathcal{L}\{f(t)\} - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$.

- Beweise und Beispiele.

- Anmerkung: Für die praktischen Anwendungen der Laplace-Transformation sind der Linearitäts- und der Differentiationssatz die entscheidenden Grundlagen.

Linearer Ausdruck, der Ableitungen enthält.	Laplace- $\longrightarrow$ transf.	Ausdruck ohne Ableitungen.

  Ein linearer Ausdruck wird transformiert und im Bildraum bearbeitet, weil er dort eine einfachere Darstellung hat. Das Ergebnis wird in den Originalraum zurücktransformiert.

- Satz (Einige Korrespondenzen der Laplace-Transformation)

  Es gilt:

  $$1 \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{1}{s} \qquad\qquad e^{at} \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{1}{s-a}$$

  $$t \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{1}{s^2} \qquad\qquad \sin(\omega t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

  $$t^n \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{n!}{s^{n+1}} \qquad\qquad \cos(\omega t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

- Beweis