

Laplace-Transformation

Laplace-Integral, grundlegende Eigenschaften, Korrespondenzen

- Begriff der Transformation und Rücktransformation einer Funktion.
- Im folgenden sei $f(t) = 0$ für $t < 0$. Wir bezeichnen $t = 0$ als den Einschaltzeitpunkt.
- Definition (Laplace-Transformation)

Die **Laplace-Transformierte** $F(s)$ zur Funktion $f(t)$ ist

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt.$$

Schreibweise: $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ oder $F(s) \bullet\text{---}\circ f(t)$.

Paare von Funktionen $f(t)$ und $F(s)$ mit $f(t) \circ\text{---}\bullet F(s)$ heißen **Korrespondenzen**. Dabei wird $f(t)$ als *Zeitfunktion* oder *Originalfunktion* bezeichnet; $F(s)$ wird *Bildfunktion* genannt.

- Schematische Skizze.
- Anmerkung:
 1. Allgemein ist $s \in \mathbb{C}$. Wir haben im folgenden meistens $s \in \mathbb{R}$.
 2. Das Integral existiert nur unter bestimmten Bedingungen an die Funktion f (unter anderem: nicht „zu starkes Wachstum“ für $t \rightarrow \infty$).
 3. Die Laplace-Transformation bildet die Mengen der Original- und der Bildfunktionen **eineindeutig** aufeinander ab.
 4. Problemstellung der **Rücktransformation**: Gegeben ist $F(s)$. Gesucht ist das eindeutig existierende $f(t)$, so daß $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$.
Schreibweise: $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$.
- Beispiel: $f(t) = 1$ für $t \geq 0$.
- Beispiel: $f(t) = t$ für $t \geq 0$.
- Beispiel: $f(t) = e^{at}$ für $t \geq 0$ mit a konstant.

- Satz (**Linearitätssatz**)

Es gilt

1. $\mathcal{L}\{k \cdot f(t)\} = k \cdot \mathcal{L}\{f(t)\}$, mit k konstant;
2. $\mathcal{L}\{f(t) + g(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} + \mathcal{L}\{g(t)\}$.

- Anmerkung: Zusammenfassend geschrieben heißt das

$$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\}$$

mit Konstanten a und b .

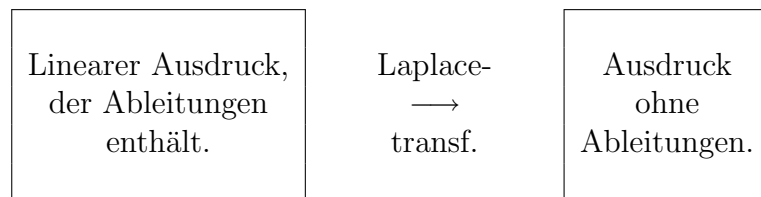
- Satz (**Differentiationssatz**)

Es gilt

1. $\mathcal{L}\{f'(t)\} = s \cdot \mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$,
2. $\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2 \cdot \mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)$,
3. $\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n \mathcal{L}\{f(t)\} - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$.

- Beweise und Beispiele.

- Anmerkung: Für die praktischen Anwendungen der Laplace-Transformation sind der Linearitäts- und der Differentiationssatz die entscheidenden Grundlagen.



Ein linearer Ausdruck wird transformiert und im Bildraum bearbeitet, weil er dort eine einfachere Darstellung hat. Das Ergebnis wird in den Originalraum zurücktransformiert.

- Satz (Einige Korrespondenzen der Laplace-Transformation)

Es gilt:

$1 \circ \bullet \frac{1}{s}$	$e^{at} \circ \bullet \frac{1}{s - a}$
$t \circ \bullet \frac{1}{s^2}$	$\sin(\omega t) \circ \bullet \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$t^n \circ \bullet \frac{n!}{s^{n+1}}$	$\cos(\omega t) \circ \bullet \frac{s}{s^2 + \omega^2}$

- Beweis