Reihen

Fourierreihen — Spektraldarstellung, komplexe Schreibweise

- Satz

  Eine Fourierreihe kann aus der Cosinus-Sinus-Darstellung in eine Amplituden-Phasen-Darstellung umgeschrieben werden:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \Big) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(nx - \phi_n).$$

  Dabei ist

$$A_0 = \frac{a_0}{2} \quad \text{und} \quad A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad \text{für } n = 1,\, 2,\, \ldots$$

  sowie

$$\phi_n = \begin{cases} \arctan(b_n/a_n) & \text{für } a_n > 0, \\ \arctan(b_n/a_n) + \pi & \text{für } a_n < 0. \end{cases}$$

- Beweis

- Anmerkung: Die Amplituden-Phasen-Form der Fourierreihe heißt auch die ***spektrale Darstellung***.

- Definition

  Als ***Amplitudenspektrum*** bezeichnen wir die graphische Darstellung der Amplituden A_n in Abhängigkeit von n.

  Entsprechend heißt die graphische Darstellung der Phasenverschiebungen ϕ_n als Funktion von n das ***Phasenspektrum***.

- Anmerkung: Man spricht vom *Zeitbereich* bzw. vom *Frequenzbereich*, wenn man eine Funktion einerseits durch ihre zeitabhängigen Funktionswerte und andererseits durch ihre frequenzabhängigen Amplituden darstellt.

- Beispiele

- Satz

  Es sei f eine 2π-periodische Funktion, und a_n und b_n seien die Fourierkoeffizienten von f. Dann kann die Fourierreihe von f in der ***komplexen Schreibweise*** als

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

geschrieben werden, wobei die c_n durch die Formeln

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{a_0}{2} \\ c_n &= \frac{a_n - ib_n}{2} \qquad \text{für } n = 1,\, 2,\, 3,\, \ldots \\ c_n &= \frac{a_{-n} + ib_{-n}}{2} \qquad \text{für } n = -1,\, -2,\, -3,\, \ldots \end{aligned}$$

gegeben sind. Dabei ist i die imaginäre Einheit.

Die Koeffizienten der komplexen Fourierreihe können auch direkt durch die Integrale mit komplexen Integranden

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx}\, dx \qquad \text{für } n = 0,\, \pm 1,\, \pm 2,\, \pm 3,\, \ldots$$

berechnet werden.

- Beweis
- Beispiel