Laplace-Transformation 2

Anwendungen: Differentialgleichungen, Übertragungsvorgänge

- Beispiel: Gegeben sei die ***lineare Anfangswertaufgabe mit konstanten Koeffizienten***
$$\dot{x} + 3x = 0, \quad x(0) = 5.$$
Wir berechnen die Lösung mit Hilfe der Laplace-Transformation in folgenden Schritten.
  1. Schritt: Transformation der Differentialgleichung.
  2. Schritt: Auflösen nach $\mathcal{L}\{x\}$.
  3. Schritt: Rücktransformation.
- Prinzip:
  - Gegeben sind eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten sowie Anfangsbedingungen.
  - Durch Anwendung der Laplace-Transformation kommt man vom Originalraum in den Bildraum.
  - Man erhält eine algebraische Gleichung für die Transformierte der Lösungsfunktion.
  - Die algebraische Gleichung wird gelöst.
  - Durch Rücktransformation der Lösung kommt man vom Bildraum zurück in den Originalraum.
  - Man hat die spezielle Lösung der Differentialgleichung, d.h. die Lösung der Anfangswertaufgabe.
- Anmerkung: Die Rücktransformation aus dem Bild- in den Originalraum geschieht üblicherweise mit *Tabellen von Korrespondenzen* aus Formelsammlungen. Um diese verwenden zu können, wird die Bildfunktion zunächst in Ausdrücke umgeformt, die in den Tabellen stehen.

  Dabei ist der folgende Satz über die Linearität der Rücktransformation nützlich.

Copyright © 2009, Prof. Dr. H.-R. Metz. All rights reserved.

- Satz

  Die inverse Laplace-Transformation (Rücktransformation) ist linear, d.h. es gilt
  $$\mathcal{L}^{-1}\{aF(s) + bG(s)\} = a\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + b\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$$
  mit Konstanten a und b.

- Beweis

- Beispiel: Die spezielle Lösung der Differentialgleichung $\ddot{x} + 9x = 0$ mit den Anfangsbedingungen $x(0) = 7$ und $\dot{x}(0) = -15$ wird berechnet.

- Beispiel: Ein spezieller ***elektrischer Vierpol*** wird verwendet, um die Anwendung der Laplacetransformation auf Übertragungsvorgänge zu demonstrieren.

  Gegeben ist dabei der Vierpol zusammen mit der Eingangsspannung u_e. Gesucht ist die Ausgangsspannung u_a.

  Es zeigt sich, daß die durch
  $$G(s) = \frac{\mathcal{L}\{u_a\}}{\mathcal{L}\{u_e\}}$$
  definierte ***Übertragungsfunktion*** $G(s)$ eine wesentliche Rolle spielt. $G(s)$ ist *charakteristisch für den Vierpol*, d.h. unabhängig von u_e und u_a.

- Prinzip: Ein System (z.B. eine elektrische Schaltung) zur Übertragung von Signalen (z.B. Spannungen) wird durch eine ***Übertragungsfunktion*** $G(s)$ charakterisiert. Für Eingangssignale $f_e(t)$ und Ausgangssignale $f_a(t)$ gilt
  $$\mathcal{L}\{f_a(t)\} = G(s) \cdot \mathcal{L}\{f_e(t)\}$$
  beziehungsweise
  $$\frac{\mathcal{L}\{f_a(t)\}}{\mathcal{L}\{f_e(t)\}} = G(s).$$
  Ist für ein System die Übertragungsfunktion $G(s)$ bekannt, muß zur Bestimmung von f_a lediglich

  1. $\mathcal{L}\{f_e(t)\}$,
  2. $G(s) \cdot \mathcal{L}\{f_e(t)\}$,
  3. $\mathcal{L}^{-1}\{G(s) \cdot \mathcal{L}\{f_e(t)\}\}$

  berechnet werden.