Differentialgleichungen 11

Partielle Differentialgleichungen

- Problemstellung: Gegeben ist eine Gleichung, in der partielle Ableitungen einer Funktion von mehreren Veränderlichen vorkommen. Gesucht ist diese Funktion.

- Beispiele: Im folgenden listen wir einige wenige der vielen partiellen Differentialgleichungen auf, die in der Physik und den Ingenieurwissenschaften eine Rolle spielen.

- Die ***Laplace-Gleichung*** für die Funktion $u = u(x, y, z)$ von drei Veränderlichen,
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$
Mit Hilfe des ***Laplace-Operators***
$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$
kann sie kurz als $\Delta u = 0$ geschrieben werden.

- Die ***Poisson-Gleichung***
$$\Delta u = f$$
mit einer Funktion $f = f(x, y, z)$. (Laplace- und Poisson-Gleichung werden beispielsweise in der Hydrodynamik und der Elektrostatik verwendet.)

- Die ***Wellengleichung***
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u = 0.$$
Hier hängt $u = u(x, y, z, t)$ auch von der Zeit t ab.

- Die ***Diffusionsgleichung*** oder auch ***Wärmeleitungsgleichung***
$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = 0.$$

Copyright © 2009, Prof. Dr. H.-R. Metz. All rights reserved.

- Weitere prominente Beispiele sind die Navier-Stokes-Gleichung (aus der Hydrodynamik), die Maxwell-Gleichungen (aus der Elektrodynamik) sowie die Schrödinger-Gleichung (aus der Quantenmechanik).

- Anmerkung: Wir wollen nur einen ersten Eindruck davon vermitteln, worum es bei partiellen Differentialgleichungen geht, wie man bei physikalisch-technischen Problemstellungen auf partielle Differentialgleichungen kommt, und wie eine spezielle Lösungsmethode funktioniert, die in einigen Fällen brauchbar ist.

  Zu diesem Zweck gehen wir exemplarisch vor, d.h. wir werden uns nicht mit theoretischen Grundlagen oder allgemeinen Sätzen beschäftigen, sondern lediglich ein Beispiel betrachten, das aber sowohl physikalisch-technisch als auch mathematisch sehr interessant ist.

- Beispiel: Die schwingende Saite.

  Ausgehend von einfachen physikalischen Annahmen stellen wir die ***Differentialgleichung der schwingenden Saite***

  $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

  (kurz: $\ddot{u} = \alpha^2 u''$) auf; die Funktion $u = u(x,t)$ beschreibt die Auslenkung an der Stelle x zur Zeit t. Zur Lösung verwenden wir den *Separationsansatz* $u(x,t) = v(x) \cdot w(t)$.

  Die Saite ist an ihren Enden eingespannt, diese *Randbedingungen* werden in die Lösung eingearbeitet und führen auf unendlich viele Teillösungen. Geschwindigkeit und Auslenkung zum Zeitpunkt $t = 0$ stellen die *Anfangsbedingungen* dar. Eine Anfangsgeschwindigkeit von 0 entlang der kompletten Saite vereinfacht die Teillösungen.

  Durch Überlagerung der unendlich vielen Teillösungen erhalten wir eine Funktionenreihe als allgemeine Lösung. Der Versuch, die Anfangsauslenkung zu berücksichtigen, führt auf eine trigonometrische Reihe, deren Koeffizienten gesucht sind. Damit haben wir die grundlegende Problemstellung aus der Theorie der Fourier-Reihen.