Differentialgleichungen 9

Systeme von Differentialgleichungen

- Beispiel: Bewegungsgleichungen linear gekoppelter Massenpunkte.
- Definition (System von Differentialgleichungen 1. Ordnung)

  Die n Gleichungen

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ y_2' &= f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ &\vdots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{aligned}$$

  bilden ein ***System von* n *expliziten Differentialgleichungen 1. Ordnung***. Die Lösung besteht aus n Funktionen $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$, die alle Gleichungen des Systems erfüllen.

- Anmerkung: Eventuell werden Zusatzforderungen gestellt, etwa daß die Lösungsfunktionen an einer Stelle x_0 bestimmte Werte annnehmen sollen. Mit diesen ***Anfangsbedingungen*** $y_1(x_0) = a_1$, $y_2(x_0) = a_2$, ..., $y_n(x_0) = a_n$ können die Parameter der allgemeinen Lösung berechnet werden.
- Beispiel
- Schreibweise

  Zur kompakten Darstellung von Systemen von Differentialgleichungen verwendet man die Vektorschreibweise

$$\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, \quad \vec{y}\,'(x) = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ \vdots \\ y_n'(x) \end{pmatrix}, \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

  für die gesuchten Funktionen, deren Ableitungen und die Anfangswerte, sowie

$$\vec{f}(x, \vec{y}) = \begin{pmatrix} f_1(x, \vec{y}) \\ \vdots \\ f_n(x, \vec{y}) \end{pmatrix}$$

Copyright © 2009, Prof. Dr. H.-R. Metz. All rights reserved.

für die rechten Seiten der Differentialgleichungen. Damit wird eine Anfangswertaufgabe für ein System 1. Ordnung als

$$\vec{y}\,'(x) = \vec{f}(x, \vec{y}), \qquad \vec{y}(x_0) = \vec{a}$$

geschrieben.

- Einsetzverfahren

  In manchen Fällen, darunter solche, die für praktische Anwendungen von Bedeutung sind, lassen sich Systeme von Differentialgleichungen mit dem ***Einsetzverfahren*** lösen.

  Dabei löst man eine Gleichung des Systems nach einem y_i auf und setzt dann in eine andere Gleichung ein. Je nachdem wieviele Gleichungen das System hat, muß das eventuell mehrfach durchgeführt werden. Das Ziel ist, Differentialgleichungen zu bekommen, die jeweils nur eine einzige unbekannte Funktion enthalten und mit bekannten Methoden lösbar sind.

- Beispiel

- Exponentialansatz

  Hat das System der Differentialgleichungen eine spezielle Gestalt, dann kann auch ein ***Exponentialansatz*** zum Erfolg führen.

- Beispiel

- Anmerkung: Es soll noch einmal ausdrücklich betont werden, daß Systeme von Differentialgleichungen im allgemeinen weder mit dem Einsetzverfahren noch mit einem Exponentialansatz gelöst werden können. Diese Methoden sind nur in Sonderfällen anwendbar.