Laplace-Transformation 3

Korrespondenzen, Rechenregeln

- Satz

  Es gelten die folgenden Korrespondenzen.

  $$1 \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s} \qquad e^{at} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s-a}$$

  $$t \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s^2} \qquad \sin(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s^2+1}$$

  $$t^n \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{n!}{s^{n+1}} \qquad \cos(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{s}{s^2+1}$$

- Anmerkung: Einige dieser Korrespondenzen kennen wir bereits, sie wurden als Beispiele zum Laplace-Integral hergeleitet.

- Beweis

- Neben dem Linearitäts- und Differentiationssatz, die im ersten Skript zur Laplace-Transformation behandelt wurden, gibt es weitere Rechenregeln. Sie können zur Herleitung zusätzlicher Korrespondenzen verwendet werden, wobei bekannte Korrespondenzen auf verschiedene Arten abgeändert werden.

  Wir werden bei jedem der folgenden Sätze sehen, daß die Art der Abänderung eine große praktische Bedeutung hat.

- Satz (***Ähnlichkeitssatz***)

  Ist $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, so gilt

  $$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a} \cdot F\left(\frac{s}{a}\right) \qquad \text{mit } a > 0.$$

- Anmerkung: $f(at)$ ist eine „ähnliche“ Kurve wie $f(t)$; es ist für $a < 1$ eine Streckung der Kurve von $f(t)$ in t-Richtung und für $a > 1$ eine Stauchung der Kurve von $f(t)$ in t-Richtung.

- Beweis
- Beispiele: Die Sinus- und die Cosinusfunktion mit der Kreisfrequenz ω.
- Satz (***Verschiebungssatz***)

  Ist $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, so gilt

  (a) $\mathcal{L}\{f(t-t_0)\} = e^{-st_0} \cdot F(s) \quad \text{mit } t_0 > 0,$

  (b) $\mathcal{L}\{f(t+t_0)\} = e^{st_0} \cdot \left[F(s) - \int_0^{t_0} f(t)e^{-st}\,dt\right] \quad \text{mit } t_0 > 0.$
- Anmerkung: In beiden Fällen haben wir eine Verschiebung der Kurve der Funktion $f(t)$ um die Strecke t_0, zunächst bei $f(t-t_0)$ nach rechts und im zweiten Fall bei $f(t+t_0)$ nach links.
- Beweis
- Beispiel
- Satz (***Dämpfungssatz***)

  Ist $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, so gilt

  $$\mathcal{L}\{e^{-\delta t} f(t)\} = F(s+\delta).$$
- Beweis
- Beispiel: Gedämpfte Schwingung.