

Laplace-Transformation 1

Laplace-Integral, Korrespondenzen, grundlegende Eigenschaften

- Begriff der Transformation und Rücktransformation einer Funktion.
- Im folgenden sei $f(t) = 0$ für $t < 0$. Wir bezeichnen $t = 0$ als den Einschaltzeitpunkt.
- Definition (Laplace-Transformation)

Die **Laplace-Transformierte** $F(s)$ zur Funktion $f(t)$ ist

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt.$$

Schreibweise: $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ oder $F(s) \bullet\text{---}\circ f(t)$.

Paare von Funktionen $f(t)$ und $F(s)$ mit $f(t) \circ\text{---}\bullet F(s)$ heißen **Korrespondenzen**. Dabei wird $f(t)$ als *Zeitfunktion* oder *Originalfunktion* bezeichnet; $F(s)$ wird *Bildfunktion* genannt.

- Schematische Skizze.
- Anmerkung:
 - (a) Allgemein ist $s \in \mathbb{C}$. Wir haben im folgenden meistens $s \in \mathbb{R}$.
 - (b) Das Integral existiert nur unter bestimmten Bedingungen an die Funktion f (unter anderem: nicht „zu starkes Wachstum“ für $t \rightarrow \infty$).
 - (c) **Rücktransformation**: Gegeben ist $F(s)$. Gesucht ist $f(t)$ so, daß $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$. Schreibweise: $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$. (Schematische Skizze!)
 - (d) Die Laplace-Transformation bildet f und F **eindeutig** aufeinander ab.
- Beispiel: $f(t) = t$ für $t \geq 0$.
- Beispiel: $f(t) = k$ für $t \geq 0$ mit k konstant.
- Beispiel: $f(t) = e^{at}$ für $t \geq 0$ mit a konstant.

- Satz (**Linearitätssatz**)

Es gilt

(a) $\mathcal{L}\{k \cdot f(t)\} = k \cdot \mathcal{L}\{f(t)\}$, mit k konstant;

(b) $\mathcal{L}\{f(t) + g(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} + \mathcal{L}\{g(t)\}$.

- Beweis

- Beispiel

- Satz (**Differentiationssatz**)

Es gilt

(a) $\mathcal{L}\{f'(t)\} = s \cdot \mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$,

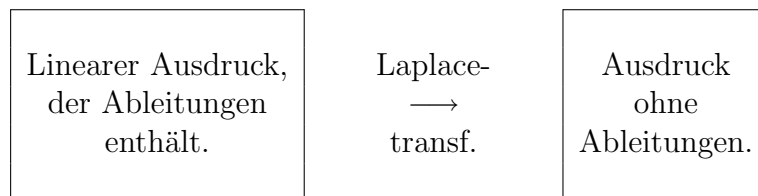
(b) $\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2 \cdot \mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)$,

(c) $\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n \mathcal{L}\{f(t)\} - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$.

- Beweis

- Beispiel

- Anmerkung: Für die praktischen Anwendungen der Laplace-Transformation sind der Linearitäts- und der Differentiationssatz die entscheidenden Grundlagen.



Ein linearer Ausdruck wird transformiert und im Bildraum bearbeitet, weil er dort eine einfachere Darstellung hat. Das Ergebnis wird in den Originalraum zurücktransformiert.