Laplace-Transformation 1

Laplace-Integral, Korrespondenzen, grundlegende Eigenschaften

- Begriff der Transformation und Rücktransformation einer Funktion.
- Im folgenden sei $f(t) = 0$ für $t < 0$. Wir bezeichnen $t = 0$ als den Einschaltzeitpunkt.
- Definition (Laplace-Transformation)

  Die ***Laplace-Transformierte*** $F(s)$ zur Funktion $f(t)$ ist

  $$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt.$$

  Schreibweise: $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ oder $F(s)$ •—∘ $f(t)$.

  Paare von Funktionen $f(t)$ und $F(s)$ mit $f(t)$ ∘—• $F(s)$ heißen ***Korrespondenzen***. Dabei wird $f(t)$ als *Zeitfunktion* oder *Originalfunktion* bezeichnet; F(s) wird *Bildfunktion* genannt.
- Schematische Skizze.
- Anmerkung:
  (a) Allgemein ist $s \in \mathbb{C}$. Wir haben im folgenden meistens $s \in \mathbb{R}$.
  (b) Das Integral existiert nur unter bestimmten Bedingungen an die Funktion f (unter anderem: nicht „zu starkes Wachstum“ für $t \to \infty$).
  (c) ***Rücktransformation***: Gegeben ist $F(s)$. Gesucht ist $f(t)$ so, daß $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$. Schreibweise: $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$.
  (Schematische Skizze!)
  (d) Die Laplace-Transformation bildet f und F ***eineindeutig*** aufeinander ab.
- Beispiel: $f(t) = t$ für $t \geq 0$.
- Beispiel: $f(t) = k$ für $t \geq 0$ mit k konstant.
- Beispiel: $f(t) = e^{at}$ für $t \geq 0$ mit a konstant.

Copyright © 2008, Prof. Dr. H.-R. Metz. All rights reserved.

- Satz (***Linearitätssatz***)

  Es gilt

  (a) $\mathcal{L}\{k \cdot f(t)\} = k \cdot \mathcal{L}\{f(t)\}$, mit k konstant;
  (b) $\mathcal{L}\{f(t) + g(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} + \mathcal{L}\{g(t)\}$.

- Beweis

- Beispiel

- Satz (***Differentiationssatz***)

  Es gilt

  (a) $\mathcal{L}\{f'(t)\} = s \cdot \mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$,
  (b) $\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2 \cdot \mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)$,
  (c) $\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n \mathcal{L}\{f(t)\} - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$.

- Beweis

- Beispiel

- Anmerkung: Für die praktischen Anwendungen der Laplace-Transformation sind der Linearitäts- und der Differentiationssatz die entscheidenden Grundlagen.

Linearer Ausdruck, der Ableitungen enthält.	Laplace- $\longrightarrow$ transf.	Ausdruck ohne Ableitungen.

  Ein linearer Ausdruck wird transformiert und im Bildraum bearbeitet, weil er dort eine einfachere Darstellung hat. Das Ergebnis wird in den Originalraum zurücktransformiert.