Reihen 6

Fourierreihen — Spektraldarstellung, komplexe Schreibweise

- Satz

  Es sei f eine 2π-periodische Funktion, und a_n und b_n seien die Fourierkoeffizienten von f. Dann kann die Fourierreihe von f als

  $$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx + \varphi_n)$$

  geschrieben werden, wobei

  $$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

  und

  $$\varphi_n = \arctan \frac{a_n}{b_n} \qquad (\text{für } b_n \neq 0)$$

  ist.

- Anmerkung: Diese Form der Fourierreihe heißt die ***spektrale Darstellung***.

- Beweis

- Definition

  Als ***Amplitudenspektrum*** bezeichnen wir die graphische Darstellung der Amplituden A_n in Abhängigkeit von n.

  Entsprechend heißt die graphische Darstellung der Phasenverschiebungen φ_n als Funktion von n das ***Phasenspektrum***.

- Anmerkung: Man spricht vom *Zeitbereich* bzw. vom *Frequenzbereich*, wenn man eine Funktion einerseits durch ihre zeitabhängigen Funktionswerte und andererseits durch ihre frequenzabhängigen Amplituden darstellt.

- Beispiele

- Satz

  Es sei f eine 2π-periodische Funktion, und a_n und b_n seien die Fourierkoeffizienten von f. Dann kann die Fourierreihe von f in der ***komplexen Schreibweise*** als

  $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

  geschrieben werden, wobei die c_n durch die Formeln

  $$\begin{aligned} c_0 &= \frac{a_0}{2} \\ c_n &= \frac{a_n - ib_n}{2} \qquad \text{für } n = 1,\, 2,\, 3,\, \ldots \\ c_n &= \frac{a_{-n} + ib_{-n}}{2} \qquad \text{für } n = -1,\, -2,\, -3,\, \ldots \end{aligned}$$

  gegeben sind. Dabei ist i die imaginäre Einheit.

  Die Koeffizienten der komplexen Fourierreihe können auch direkt durch die Integrale mit komplexen Integranden

  $$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx}\, dx \qquad \text{für } n = 0,\, \pm 1,\, \pm 2,\, \pm 3,\, \ldots$$

  berechnet werden.

- Beweis

- Beispiel