Reihen 4

Fourierreihen — Grundidee und trigonometrische Hilfsmittel

- Bei Taylorreihen werden vorgegebene Funktionen in einfachere Teilfunktionen $1, x, x^2, x^3, \ldots$ zerlegt.

  Man kann sich nun fragen, ob dies bei *periodischen* Funktionen — zum Beispiel der periodischen Rechteckfunktion oder dem periodischen Sägezahn — auch sinnvoll ist, oder ob man diese nicht besser in einfachere periodische Teilfunktionen zerlegt.

  Als „einfachere" periodische Funktionen würden sich dabei Cosinus- und Sinusfunktionen verschiedener Frequenzen anbieten. Um beispielsweise eine 2π-periodische Funktion zu bekommen, kann man dann die Cosinus- und Sinusfunktionen

  $$\cos x, \quad \sin x, \quad \cos(2x), \quad \sin(2x), \quad \cos(3x), \quad \sin(3x), \quad \ldots$$

  verwenden.

  Experimentieren mit Plot-Software (oder Zeichnen per Hand) zeigt, daß durch Überlagerungen dieser Cosinus- und Sinusfunktionen neue periodische Funktionen entstehen, die auch speziell für die Praxis interessant sind.

- Problemstellung: Wir nehmen an, daß sich die 2π-periodische Funktion f darstellen läßt als Reihe

  $$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \Big) \\ &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos(2x) + b_2 \sin(2x) + \ldots \end{aligned}$$

  Jetzt stellen wir die Frage: Wie kann man bei einer solchen Darstellung die Koeffizienten a_n und b_n aus der Funktion f berechnen?

- Anmerkung:

  (a) Wir untersuchen nicht, welche Bedingungen eine periodische Funktion erfüllen muß, um als Reihe in der obigen Form darstellbar zu sein.

  (b) Wir führen keine Konvergenzuntersuchungen durch.

(c) Wir werden in der Berechnung der a_n und b_n annehmen, daß gliedweise integriert werden darf.

- Idee zur Berechnung der a_n und b_n.
- Anmerkung: Um die Idee zur Berechnung der Koeffizienten umsetzen zu können, brauchen wir einige Aussagen über Winkelfunktionen.
- Satz (Trigonometrische Hilfsmittel)

  Es gelten die folgenden Formeln.

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha+\beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta) && (1)\\
\sin(\alpha+\beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)\sin(\beta) && (2)\\
\cos(\alpha)\cos(\beta) &= \frac{1}{2}\Big(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\Big) && (3)\\
\sin(\alpha)\cos(\beta) &= \frac{1}{2}\Big(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\Big) && (4)\\
\cos(mx)\cos(nx) &= \frac{1}{2}\Big(\cos((m+n)x)+\cos((m-n)x)\Big) && (5)\\
\sin(mx)\cos(nx) &= \frac{1}{2}\Big(\sin((m+n)x)+\sin((m-n)x)\Big) && (6)
\end{aligned}$$

- Anmerkung: In (1) und (2) haben wir die Additionstheoreme der Winkelfunktionen. Aus ihnen leiten wir die restlichen Formeln her.
- Beweis
- Satz (Orthogonalitätseigenschaften von Sinus und Cosinus)

  (a) Für $m>0$, $n>0$ gilt:

$$\int_0^{2\pi}\cos(mx)\cos(nx)\,dx = \begin{cases}\pi, & \text{falls } m=n,\\ 0, & \text{falls } m\neq n.\end{cases}$$

  (b) Für $m>0$, $n>0$ gilt:

$$\int_0^{2\pi}\sin(mx)\sin(nx)\,dx = \begin{cases}\pi, & \text{falls } m=n,\\ 0, & \text{falls } m\neq n.\end{cases}$$

  (c) Für $m>0$, $n>0$ gilt:

$$\int_0^{2\pi}\sin(mx)\cos(nx)\,dx = 0.$$

- Beweis zu (a) und (c). Der Beweis zu (b) verläuft analog.