Reihen 3

Taylorreihen

- Idee: Wir wollen eine Funktion $f = f(x)$ in der Umgebung von $x = x_0$ durch möglichst einfache Funktionen annähern.

  Wir verwenden eine konstante Funktion, eine Gerade, eine Parabel u.s.w., die mit der Funktion f an der Stelle x_0 im Funktionswert, der Steigung, der Krümmung u.s.w. übereinstimmen, also in der nullten, ersten, zweiten u.s.w. Ableitung. Voraussetzung ist natürlich, daß f entsprechend oft differenzierbar ist.

	Übereinstimmung mit f in		
	Funktionswert $f(x_0)$	Steigung $f'(x_0)$	Krümmung $f''(x_0)$
Konstante	ja	—	—
Gerade	ja	ja	—
Parabel	ja	ja	ja

- Anmerkung: Wir betrachten zunächst den Spezialfall $x_0 = 0$.

- Beispiel: Die Funktion $f(x) = e^x$ wird an der Stelle $x = 0$ durch eine Konstante, eine Gerade und eine Parabel angenähert.

- Satz

  Die Funktion $f = f(x)$ sei k-mal differenzierbar an der Stelle $x = 0$. Stimmt ein Polynom k-ten Grades $\sum_{n=0}^{k} a_n x^n$ an der Stelle $x = 0$ bis zur k-ten Ableitung mit f überein, dann gilt für die Koeffizienten

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} .$$

- Beweis

- Definition

  Die Funktion $f = f(x)$ sei k-mal differenzierbar an der Stelle $x = 0$. Dann heißt

$$\sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

  das ***Taylorpolynom*** k-ten Grades von f mit Entwicklungspunkt $x = 0$.

- Beispiele
- Anmerkung: Nun ist die Frage naheliegend, ob bei einer unendlich oft differenzierbaren Funktion f durch den Übergang von der endlichen Summe zur unendlichen Reihe ein sinnvoller Ausdruck entsteht, d.h. ob die Reihe konvergent ist und die zugrunde liegende Funktion f als Grenzfunktion hat.

  Dies ist tatsächlich bei vielen Funktionen der Fall. Die betreffenden Reihen werden als ***Taylorreihen*** bezeichnet. Der Konvergenzbereich ist stets ein Intervall mit dem Entwicklungspunkt als Intervallmitte; in manchen Fällen hat man Konvergenz auf der gesamten reellen Achse.

  Für Taylorreihen mit dem Entwicklungspunkt $x = 0$ gilt auf dem Konvergenzintervall
  $$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n.$$
  Man kann allgemeiner Taylorpolynome bzw. -reihen mit einem beliebigen Entwicklungspunkt betrachten und erhält entsprechend auf dem Konvergenzintervall die Formel
  $$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\, (x - x_0)^n$$
  der Taylorreihe mit Entwicklungspunkt $x = x_0$.
- Beispiele: Auf der gesamten reellen Achse konvergent sind die folgenden Taylorreihen der e-Funktion, der Cosinus- und der Sinusfunktion.
  $$\begin{aligned} e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\ \cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \\ \sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{aligned}$$
- Anmerkung: Die Reihenentwicklungen von e^x, $\cos x$ und $\sin x$ liefern eine Begründung für die Eulersche Formel
  $$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi,$$
  die wir bei den komplexen Zahlen kennengelernt haben.
- Beispiel für eine Taylorreihe mit Entwicklungspunkt $x_0 \neq 0$ und einem Konvergenzbereich ungleich der reellen Achse.
- Anmerkung: Die Grenzfunktion einer Taylorreihe ist auf dem gesamten Konvergenzintervall beliebig oft differenzierbar; die Ableitungen kann man durch gliedweises Differenzieren bekommen.