

## Reihen 1

### Folgen von Zahlen — Folgen von Funktionen

- Definition

Wird jedem  $n \in \mathbb{N}$  eine Zahl  $a_n$  zugeordnet, so entsteht eine **unendliche Zahlenfolge**

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

Schreibweise:  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  oder kurz  $(a_n)$ .

Die Zahlen  $a_n$  heißen **Glieder** der Folge.

- Anmerkung:

(a) Die Indizierung darf statt mit 1 auch mit jeder anderen ganzen Zahl beginnen.

(b) Eine Folge kann als Funktion  $f$  mit

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(n) = a_n$$

aufgefaßt werden.

(c) Die Vorschrift  $a_n = f(n)$  heißt **Bildungsgesetz** der Folge.

(d) Eine **endliche** Folge

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_m$$

wird entsprechend geschrieben:  $(a_n)_{n=1}^m$ .

- Beispiele, u.a.

- Folge der Primzahlen,
- arithmetische Folge,
- geometrische Folge,
- Fibonacci-Folge.

- Beispiele für konvergente Folgen (Begriff der Konvergenz anschaulich).

- Definition

Die Zahlenfolge  $(a_n)$  **konvergiert** gegen  $g$  (strebt gegen  $g$ ), wenn es zu jeder Zahl  $\epsilon > 0$  einen Index  $n_0(\epsilon)$  gibt, so daß

$$|a_n - g| < \epsilon \quad \text{für alle } n > n_0(\epsilon)$$

ist. Dabei heißt  $g$  der **Grenzwert** (Limes) der Folge  $(a_n)$ . Schreibweise:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$  oder  $a_n \rightarrow g$  ( $n \rightarrow \infty$ ).

Die Folge  $(a_n)$  heißt **divergent**, wenn sie nicht konvergent ist.

- Satz

Eine konvergente Folge besitzt *genau einen* Grenzwert.

- Beispiele, u.a.

- die Nullfolge  $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$
- die Folge  $\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)_{n=1}^{\infty}$
- eine bestimmt divergente Folge (Begriff des uneigentlichen Grenzwerts, Schreibweise)
- die Folge  $\left(\frac{3n^2 - 2n + 1}{n^2 + 4}\right)_{n=1}^{\infty}$
- die geometrische Folge  $(q^n)_{n=0}^{\infty}$

- Definition

Habe wir unendlich viele durchnummerierte Funktionen  $f_1, f_2, \dots$ , die alle auf derselben Teilmenge  $M$  der reellen Zahlen definiert sind, dann nennen wir  $(f_n)_{n=1}^{\infty}$  eine **Funktionsfolge** auf  $M$ .

Konvergiert für jedes  $x \in M$  die Zahlenfolge  $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ , dann wird durch

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad (x \in M)$$

auf  $M$  die **Grenzfunktion**  $f$  der Funktionsfolge definiert, und wir sagen, daß die Funktionsfolge auf  $M$  **punktweise konvergent** gegen  $f$  ist, geschrieben

$$f_n \rightarrow f \quad (n \rightarrow \infty) \quad \text{auf } M, \quad \text{oder} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f \quad \text{auf } M.$$

- Anmerkung: Eigenschaften der Funktionen  $f_1, f_2, \dots$  müssen sich bei punktweiser Konvergenz nicht auf die Grenzfunktion übertragen. Sind beispielsweise alle Funktionen  $f_1, f_2, \dots$  stetig, dann muß die Grenzfunktion keineswegs stetig sein.

- Beispiele