

## Differentialgleichungen 5

### Inhomogene lineare Dgl. 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

- Satz

Es sei  $y_h$  die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0.$$

Es sei  $y_p$  eine beliebige spezielle (partikuläre) Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = g(x).$$

Dann ist die **allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung** gleich der Summe

$$y = y_h + y_p.$$

- Beweis

- Anmerkung: Da wir bereits wissen, wie  $y_h$  berechnet wird, stellt sich nur noch die Frage: Wie findet man eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung?

- **Lösungsansatz vom Typ der Störfunktion**

Um eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = g(x)$$

zu bekommen, verwenden wir einen Ansatz  $y_p$  von der „allgemeinen“ Form der rechten Seite  $g(x)$ . Dabei bedeutet „allgemein“, daß noch freie Parameter enthalten sind. Setzt man den Ansatz in die Differentialgleichung ein, ergeben sich für die Parameter spezielle Werte.

Sonderfälle hat man, wenn die Störfunktion  $g(x)$  bereits in der Lösung der homogenen Differentialgleichung vorkommt; dann wird der Lösungsansatz mit  $x$  multipliziert (bzw. mit  $x^2$ , falls das charakteristische Polynom eine doppelte Nullstelle besitzt).

Ist  $g(x)$  eine Summe mehrerer Funktionen, dann wird der Lösungsansatz als Summe der entsprechenden Ansätze gewählt.

Für  $g(x)$  und  $k \cdot g(x)$  (mit  $k$  konstant) verwendet man dieselben Ansätze.

- Beispiel:  $y'' - 4y = 3x$ .
- Beispiel: Anfangswertaufgabe  $\ddot{u} + 3\dot{u} + 2u = e^{-t}$ ,  $u(0) = -2$ ,  $\dot{u}(0) = 10$ .
- Beispiel: Anfangswertaufgabe  $y' + 5y = 4 \sin(3x)$ ,  $y(0) = 1$ .

Störfunktion: $g(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n$
Ansatz: $y_p = B_0 + B_1x + \dots + B_nx^n$
Ausnahme: in der Dgl. ist $a_0 = 0$ und $a_1 \neq 0$ . Dann: $y_p = x(B_0 + B_1x + \dots + B_nx^n)$

Anmerkung: Der Fall  $a_0 = a_1 = 0$  und  $a_2 \neq 0$  ist hier irrelevant, da die Lösung dann direkt mit Integration berechnet werden kann.

Störfunktion: $g(x) = e^{cx}$
Ansatz: $y_p = A \cdot e^{cx}$
Ausnahmen: 1) Homogene Teillösungen $e^{c_1x}$ , $e^{c_2x}$ , $c \neq c_1, c_2$ . Dann: $y_p = A \cdot x \cdot e^{cx}$ 2) Homogene Teillösungen $e^{c_1x}$ , $x e^{c_1x}$ . Dann: $y_p = A \cdot x^2 \cdot e^{cx}$

Störfunktion: $g(x) = \sin(\omega x)$ oder $g(x) = \cos(\omega x)$
Ansatz: $y_p = A \cdot \sin(\omega x) + B \cdot \cos(\omega x)$
Ausnahme: Homogene Teillösungen $\sin(\omega x)$ , $\cos(\omega x)$ . Dann: $y_p = x \cdot (A \cdot \sin(\omega x) + B \cdot \cos(\omega x))$

Störfunktion:  $g(x) = e^{cx} \cdot \sin(\omega x)$  oder  $g(x) = e^{cx} \cdot \cos(\omega x)$

Ansatz:  $y_p = e^{cx} \cdot (A \cdot \sin(\omega x) + B \cdot \cos(\omega x))$

Ausnahme: Homogene Teillösungen  $e^{cx} \cdot \sin(\omega x)$ ,  $e^{cx} \cdot \cos(\omega x)$ .  
Dann:  $y_p = x \cdot e^{cx} \cdot (A \cdot \sin(\omega x) + B \cdot \cos(\omega x))$

Störfunktion:  $g(x) = e^{i\omega x}$

Ansatz:  $y_p = A \cdot e^{i(\omega x - \psi)}$

Ausnahme: Homogene Teillösung  $e^{i\omega x}$ .  
Dann:  $y_p = A \cdot x \cdot e^{i(\omega x - \psi)}$

Störfunktion:  $g(x) = e^{cx} \cdot e^{i\omega x}$

Ansatz:  $y_p = A \cdot e^{cx} \cdot e^{i(\omega x - \psi)}$

Ausnahme: Homogene Teillösung  $e^{cx} \cdot e^{i\omega x}$ .  
Dann:  $y_p = A \cdot x \cdot e^{cx} \cdot e^{i(\omega x - \psi)}$