Differentialgleichungen 4

Beispiele zu hom. lin. Dgln. 2. Ordn. mit konst. Koeffizienten

- Aus der Differentialgleichung $y'' + p\,y' + q\,y = 0$ erhält man mit dem Exponentialansatz $y = e^{\lambda x}$ die charakteristische Gleichung

  $$\lambda^2 + p\,\lambda + q = 0.$$

  Abhänging von ihren Nullstellen λ_1 und λ_2 ergeben sich drei Lösungsfälle.

  (a) λ_1, λ_2 reell und $\lambda_1 \neq \lambda_2$: $y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$

  (b) λ_1, λ_2 komplex mit $\lambda_{1,2} = k \pm i\omega$: $y(x) = e^{kx}\Big(C_1 \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x)\Big)$

  (c) λ_1, λ_2 reell und $\lambda_1 = \lambda_2$: $y(x) = (C_1 + C_2 x)e^{\lambda_1 x}$

- Beispiel: $y'' - 3y' - 10y = 0$.

- Beispiel: $\ddot{u} - 6\dot{u} + 25u = 0$.

- Beispiel: $y'' - 4y' + 4y = 0$.

- Sind zusätzlich zu einer Differentialgleichung 2. Ordnung noch zwei Anfangsbedingungen gegeben, dann werden damit Werte berechnet, die den beiden Parametern der allgemeinen Lösung zugewiesen werden. Man erhält eine spezielle Lösung.

- Beispiel: Die Anfangswertaufgabe bestehend aus der Differentialgleichung

  $$\ddot{u} + 8\dot{u} + 20u = 0$$

  und den Anfangsbedingungen

  $$u(0) = 0, \qquad \dot{u}(0) = 12.$$

- Satz

  Die Lösung einer Anfangswertaufgabe

  $$y'' + ay' + by = 0, \quad y(x_0) = A, \quad y'(x_0) = B$$

  ist eindeutig.

- Beweisidee