Differentialgleichungen 1

Problemstellung — Trennung der Veränderlichen

- Einführendes Beispiel: Freier Fall.
- Definition

  Eine Gleichung, in der Ableitungen einer unbekannten Funktion bis zur n-ten Ordnung auftreten, heißt ***gewöhnliche Differentialgleichung*** **n*-ter Ordnung***.

  Als ***Lösung*** einer Differentialgleichung bezeichnet man eine Funktion, die die Differentialgleichung erfüllt.

- Anmerkung: Neben „gewöhnlichen Differentialgleichungen“ gibt es „partielle Differentialgleichungen“, in denen partielle Ableitungen von Funktionen mehrerer Veränderlicher auftreten.

  Zum Beispiel beschreibt die Wellengleichung

  $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = 0$$

  die Ausbreitung von Schwingungen (in einem homogenen Medium und ohne Störungskräfte). Die Funktion $u = u(x, y, z, t)$ hängt von vier Veränderlichen ab.

- Beispiele: Differentialgleichungen erster und höherer Ordnung mit Lösungen. Implizite und explizite Differentialgleichungen.
- Anmerkung: Die ***allgemeine Lösung*** einer Differentialgleichung n-ter Ordnung enthält n *Parameter*. Jeder Parameter darf durch einen festen Zahlenwert ersetzt werden, der aus einem bestimmten Bereich stammt. Zum Beispiel kann es sein, daß man für einen Parameter eine beliebige positive reelle Zahl einsetzen darf. Die Parameter werden auch *Konstanten* der allgemeinen Lösung genannt.

  Wurden in der allgemeinen Lösung einer Differentialgleichung die Parameter durch Zahlenwerte ersetzt, hat man eine ***spezielle Lösung*** der Differentialgleichung.

Werden die Lösungen einer Differentialgleichung graphisch veranschaulicht, dann entspricht der allgemeinen Lösung eine ***Kurvenschar***. Die einzelnen Kurven ergeben sich dabei durch die verschiedenen Werte, die für die Parameter eingesetzt werden dürfen.

Eine spezielle Kurve aus der Kurvenschar ist eine spezielle Lösung der Differentialgleichung.

- Skizze

- Bei expliziten Differentialgleichungen 1. Ordnung kann man die Lösungen (die Kurvenschar) durch ein ***Richtungsfeld*** veranschaulichen.

  Eine expliziten Differentialgleichung 1. Ordnung ist von der Gestalt

  $$y' = \ldots,$$

  wobei auf der rechten Seite ein Ausdruck steht, der von x und y abhängt und keine Ableitung enthält. Setzt man die Koordinaten eines Punktes der x-y-Ebene ein, so bekommt man die Steigung y' derjenigen Lösungskurve, die durch diesen Punkt geht. Zur Veranschaulichung zeichnet man in diesem Punkt ein kleines Geradenstück (Richtungselement) mit der berechneten Steigung.

  Werden genügend Richtungselemente gezeichnet, kann ein brauchbarer erster Eindruck vom Verlauf der Lösungskurven entstehen.

- Das Herauspicken einer speziellen Lösung aus der Kurvenschar der allgemeinen Lösung kann dadurch geschehen, daß Zusatzforderungen gestellt werden, die nur von genau einer Kurve erfüllt werden. Die Anzahl der Forderungen hängt von der Anzahl der Parameter also von der Ordnung der Differentialgleichung ab: n Bedingungen bei n-ter Ordnung.

  Zum Beispiel kann man bei einer Differentialgleichung 2. Ordnung den beiden Parametern der allgemeinen Lösung folgendermaßen Zahlenwerte zuweisen: man verlangt, daß die Lösungskurve $y = f(x)$ an der Stelle $x = a$ einen bestimmten Wert hat und ebenso an $x = b$. Die Kurve soll also am *Rand* des Intervalls $[a, b]$ durch vorgegebene Punkte der Ebene verlaufen. Bei einer solchen Zusatzforderung spricht man von *Randbedingungen.*

  Wir werden im folgenden eine andere Art von Zusatzbedingungen betrachten. Dabei werden nur an einer einzigen Stelle $x = x_0$ Vorgaben gemacht, und zwar für den Funktionswert $f(x_0)$, sowie für Ableitungen $f'(x_0)$, $f''(x_0)$ u.s.w. Da die Veränderliche x in vielen praktischen Anwendungen die Zeit darstellt, und da x_0 dabei oft der Startzeitpunkt eines physikalischen Vorgangs ist, spricht man von *Anfangsbedingungen.*

Die Auswahl der speziellen Lösung erfolgt also bei einer praktischen Aufgabenstellung aufgrund von sinnvollen Forderungen an die Lösungsfunktion, zusätzlich zu der Differentialgleichung.

- Definition

  Als ***Anfangswertaufgabe*** (AWA) bezeichnet man eine Differentialgleichung n-ter Ordnung zusammen mit n Anfangsbedingungen.

  Dabei soll die Lösung $y = y(x)$ sowohl die Differentialgleichung, als auch die Forderungen $y(x_0) = w_1$, $y'(x_0) = w_2$, $\ldots$, $y^{(n-1)}(x_0) = w_n$ erfüllen.

- Beispiele

- Anmerkung: Eine AWA wird in zwei Schritten gelöst.

  1. Berechnung der allgemeinen Lösung.
  2. Verwenden der Anfangsbedingungen zur Bestimmung der Parameterwerte und damit der speziellen Lösung.

- Anmerkung: Außer in einfachen Sonderfällen sind Differentialgleichungen nicht durch Integration lösbar.

- Beispiel: Verzögerter Fall.

- Anmerkung: Wir brauchen also ein neues Lösungsverfahren. Allerdings kennt man keine allgemeine Methode, mit der beliebige Differentialgleichungen einfach gelöst werden können. Statt dessen gibt es Verfahren, die für Differentialgleichungen eines bestimmten Typs funktionieren.

- ***Trennung der Veränderlichen***

  Lösungsverfahren für Differentialgleichungen vom Typ

  $$\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y).$$

- Beispiele

- Lösungsschema

  1. Trennung der beiden Veränderlichen und Differentiale.

     $$\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y) \qquad \text{wird zu} \qquad \frac{dy}{h(y)} = g(x)\,dx$$

  2. Unbestimmte Integration (falls möglich).

     $$\frac{dy}{h(y)} = g(x)\,dx \qquad \text{wird zu} \qquad \int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)\,dx$$

  3. Entstandene Gleichung nach y auflösen (falls möglich).

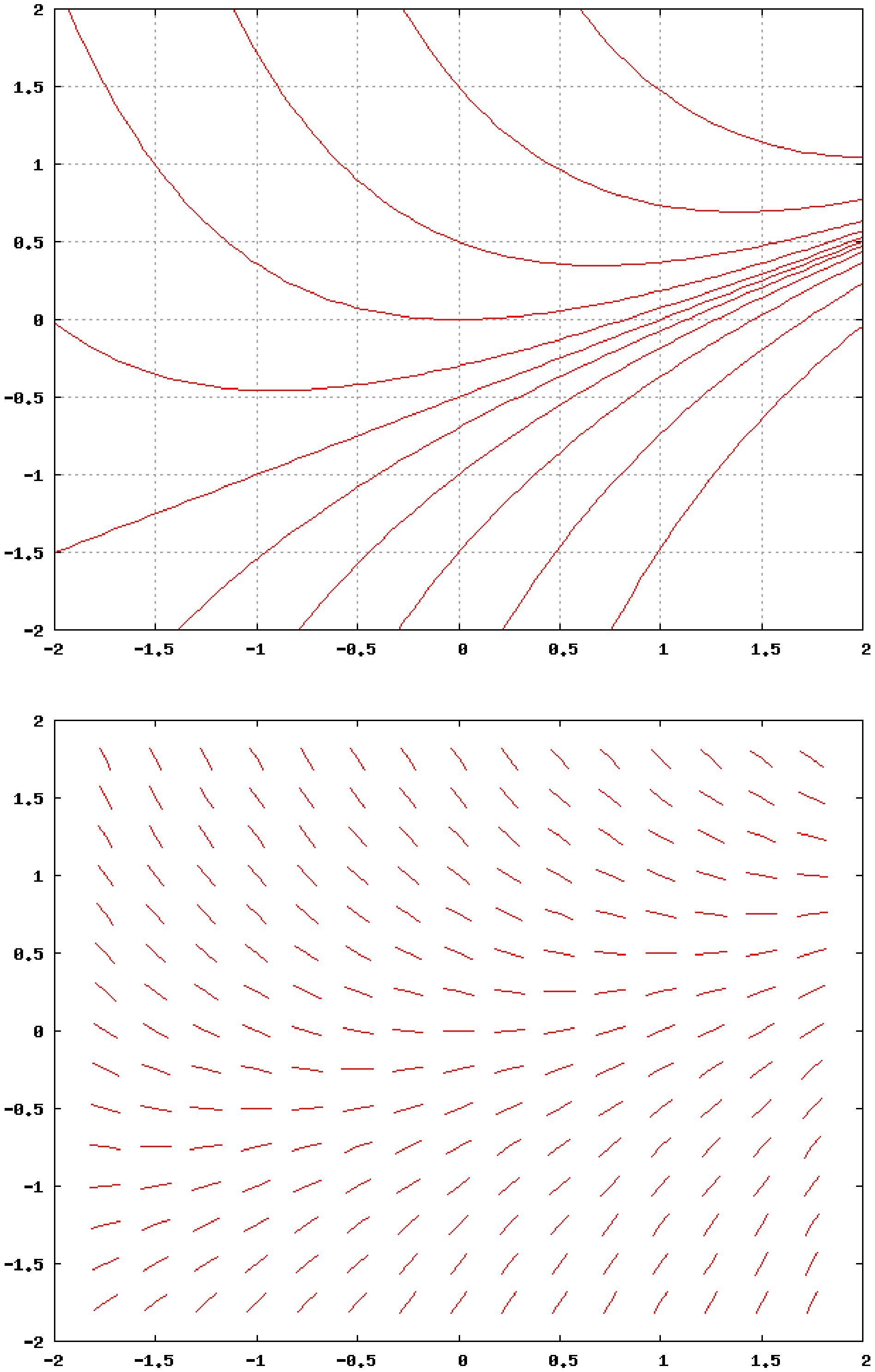

Abbildung 1: Kurvenschar (oben) und Richtungsfeld (unten) der Differentialgleichung $y' = 0,5\,x - y$.