

Komplexe Zahlen 4

Polare Arithmetik

- Satz

Ist $z = re^{i\varphi}$, so gilt $\bar{z} = re^{-i\varphi}$.

- Beweis

- Satz (Multiplikation in trigonometrischer und Exponentialdarstellung)

Für $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1} = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ und $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2} = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ gilt

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)),$$

d.h. die Beträge werden multipliziert,

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

und die Winkel addiert,

$$\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2).$$

- Beweis

- Veranschaulichung in der komplexen Ebene.

- Spezialfall: Multiplikation mit i gibt eine Drehung um 90° .

- Berechnung und Skizze.

- Satz (Division in trigonometrischer und Exponentialdarstellung)

Für $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1} = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ und $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2} = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ mit $z_2 \neq 0$ gilt

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)),$$

d.h. die Beträge werden dividiert,

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

und die Winkel subtrahiert,

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2).$$

- Anmerkung: Speziell ist $\frac{1}{z} = \frac{1}{r} e^{-i\varphi}$ für jedes $z \neq 0$.
- Beweis
- Veranschaulichung in der komplexen Ebene.
- Spezialfall: Division durch i gibt eine Drehung um -90° .
- Berechnung und Skizze.

- Definition

Eine Lösung z der Gleichung $z^n = a$ mit $z, a \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$ heißt ***n*-te Wurzel** aus a .

Im Spezialfall $a = 1$ nennt man die Lösungen von $z^n = 1$ die *n*-ten ***Einheitswurzeln***.

- Satz

Die *n*-ten Einheitswurzeln liegen alle auf dem Einheitskreis und bilden die Ecken eines regelmäßigen *n*-Ecks, von dem eine Ecke im Punkt $z = 1$ liegt, d.h. es sind die Zahlen

$$z_k = e^{i(2\pi/n)k} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1).$$

- Skizze
- Beweis
- Satz

Für $a \neq 0$, $a = a_0 e^{i\alpha}$ mit $a_0 = |a|$ und $\alpha = \arg(a)$ und für $n \in \mathbb{N}$ hat die Gleichung $z^n = a$ genau *n* verschiedene Lösungen (Wurzeln)

$$z_k = \sqrt[n]{a_0} \cdot e^{i\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}k\right)} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1).$$

- Anmerkung: Die Lösungen von $z^n = a$ bilden die Ecken eines regelmäßigen *n*-Ecks auf dem Kreis mit dem Radius $\sqrt[n]{|a|}$. Der Vektor vom Ursprung zu einer der Ecken bildet den Winkel $\arg(a)/n$ mit der positiven reellen Achse.
- Beweis