Komplexe Zahlen 3

Die e-Funktion im Komplexen

- Motivation für die Definition der e-Funktion im Komplexen.
- Definition (e-Funktion im Komplexen)

  Zu $z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$ setzen wir
  $$e^z = e^x(\cos y + i \sin y).$$
- Anmerkung:
  (a) e^z ist eine Abbildung von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$. Die reelle e-Funktion ist der Spezialfall mit $y = 0$.
  (b) Für $x = 0$ gilt speziell
  $$e^{iy} = \cos y + i \sin y.$$
  Mit der Definition von e^z
  $$\underbrace{e^z}_{=e^{x+iy}} = e^x \underbrace{(\cos y + i \sin y)}_{=e^{iy}}$$
  folgt also
  $$e^{x+iy} = e^x e^{iy}$$
  für alle $z = x + iy \in \mathbb{C}$.
- Frage: Gilt die charakteristische Eigenschaft $e^{a+b} = e^a e^b$ (a, $b \in \mathbb{R}$) der reellen e-Funktion auch dann noch, wenn a und b komplex sind?
- Satz

  Für z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$ gilt
  $$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}.$$
- Beweis

- Anmerkung: Wir benötigen in dem Beweis die Additionstheoreme für die Sinus- und Cosinusfunktion. Es gilt

$$\begin{aligned}\sin(\alpha \pm \beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta),\\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta)\end{aligned}$$

  für beliebige α, $\beta \in \mathbb{R}$.

- Satz (Eigenschaften der e-Funktion)

  Es gilt

  (a) $|e^{i\varphi}| = 1$ für alle $\varphi \in \mathbb{R}$, und $|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)}$ für alle $z \in \mathbb{C}$;

  (b) $e^z \neq 0$ und $\dfrac{1}{e^z} = e^{-z}$ für alle $z \in \mathbb{C}$;

  (c) $e^{z+2\pi ik} = e^z$, falls k ganz ist, d.h. e^z ist $2\pi i$-periodisch.

- Anmerkung: Wegen $|e^{i\varphi}| = 1$ liegen alle Zahlen $e^{i\varphi}$ auf dem Einheitskreis.

  Speziell ist $i = e^{i\pi/2}$ und $-1 = e^{i\pi}$, und es gilt

$$1 + e^{i\pi} = 0.$$

  (Diese Gleichung ist ein heißer Anwärter auf den Titel der schönsten Gleichung der Mathematik; es treten genau die wichtigsten Zahlen und die wichtigsten Operationen auf und sonst nichts.)

- Beweis

- Mit der komplexen e-Funktion wird die trigonometrische Darstellung der komplexen Zahlen umgeschrieben:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}.$$

- Definition

  Zur komplexen Zahl $z \neq 0$ heißt

$$z = re^{i\varphi}$$

  mit $r = |z|$ und $\varphi = \arg(z)$ die ***Exponentialdarstellung*** von z.

- Beispiele