

## Komplexe Zahlen 1

### Cartesische Darstellung und Arithmetik

- Problemstellung: Die Gleichung  $x^2 + 1 = 0$  hat keine reelle Lösung.
- Skizze; andere quadratische Gleichungen ohne reelle Lösung.
- Idee: Einführung „neuer Zahlen“; Erweiterung von  $\mathbb{R}$  (ähnlich: Erweiterung von  $\mathbb{Q}$  zu  $\mathbb{R}$ ).

- Definition

Das Symbol  $i$  sei eine „Zahl“ mit  $i^2 = -1$ . Wir nennen  $i$  die ***imaginäre Einheit***.

- Anmerkung: In den Ingenieurwissenschaften verwendet man anstelle von  $i$  auch das Symbol  $j$ , weil  $i$  in der Elektrotechnik für die Stromstärke steht.
- Anmerkung: Das Rechnen mit  $i$  „wie im Reellen“ unter Berücksichtigung von  $i^2 = -1$  führt zu sinnvollen Anwendungen. Vielfache von  $i$  sind dann z.B.  $2i$ ,  $\frac{5}{2}i$  und  $(-\frac{7}{3})i$ . Wird noch eine reelle Zahl addiert, entstehen Ausdrücke wie z.B.  $6 + 2i$  oder  $5 - \frac{7}{3}i$ .

Diese Einführung der komplexen Zahlen ist nicht mathematisch streng, reicht aber als Einstieg für unsere Zwecke aus.

- Definition

Zahlen der Gestalt  $bi$  mit  $b \in \mathbb{R}$ ,  $b \neq 0$  heißen (***rein***) ***imaginäre Zahlen***.

Zahlen der Form  $a + bi$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$  heißen ***komplexe Zahlen***. Wir bezeichnen

$$\mathbb{C} = \{z \mid z = a + bi; a, b \in \mathbb{R}\}$$

als ***Menge der komplexen Zahlen***.

Zu  $z = a + bi$  heißt  $a = \operatorname{Re}(z)$  der ***Realteil*** von  $z$  und  $b = \operatorname{Im}(z)$  der ***Imaginärteil*** von  $z$ .

- Anmerkung: Man beachte, daß sowohl der Real- als auch der Imaginärteil eine reelle Zahl ist.

- Rechenregeln (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division).
- Anmerkung: Es gilt

$$\begin{aligned}
 a + bi = c + di & \Leftrightarrow a = c \text{ und } b = d, \\
 c + di = 0 & \Leftrightarrow c = 0 \text{ und } d = 0, \\
 c + di \neq 0 & \Leftrightarrow c^2 + d^2 \neq 0.
 \end{aligned}$$

Ferner ist  $a + 0i = a$  für jedes  $a \in \mathbb{R}$ , also gilt auch  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ .

- Anmerkung: Man beachte, daß in  $\mathbb{C}$  keine Ordnungsrelation definiert ist. D.h.  $<$ ,  $>$ ,  $\leq$ ,  $\geq$  machen bei Zahlen aus  $\mathbb{C}$ , die nicht zur Teilmenge  $\mathbb{R}$  gehören, keinen Sinn.
- Darstellung der komplexen Zahlen in der **komplexen Ebene** (Gaußschen Ebene).
- Geometrische Veranschaulichung von Addition und Subtraktion.
- Zahlenbeispiele für das Rechnen in  $\mathbb{C}$ .