Ansätze vom Typ der Störfunktion

Um Differentialgleichungen der Gestalt

$$a_2y'' + a_1y' + a_0y = g(x)$$

zu lösen, geht man in zwei Schritten vor:

1. die rechte Seite wird gleich Null gesetzt, und die homogene Differentialgleichung
$$a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0$$
wird mit dem Exponentialansatz $y = e^{\lambda x}$ gelöst;

2. eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung wird mit einem Ansatz vom Typ der Störfunktion (Typ der rechten Seite) bestimmt.

Die Addition dieser beiden Lösungen ergibt die Gesamtlösung.

Störfunktion:	$g(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_nx^n$
Ansatz:	$y_p = B_0 + B_1x + \ldots + B_nx^n$
Ausnahme:	in der Dgl. ist $a_0 = 0$ und $a_1 \neq 0$. Dann: $y_p = x(B_0 + B_1x + \ldots + B_nx^n)$

Anmerkung: Der Fall $a_0 = a_1 = 0$ und $a_2 \neq 0$ ist hier irrelevant, da die Lösung dann direkt mit Integration berechnet werden kann.

Störfunktion:	$g(x) = e^{cx}$
Ansatz:	$y_p = A \cdot e^{cx}$
Ausnahmen:	1) Homogene Teillösungen e^{cx}, $e^{\lambda_2 x}$, $c \neq \lambda_2$. Dann: $y_p = A \cdot x \cdot e^{cx}$ 2) Homogene Teillösungen e^{cx}, xe^{cx}. Dann: $y_p = A \cdot x^2 \cdot e^{cx}$

Störfunktion:	$g(x) = \sin(\omega x)$ oder $g(x) = \cos(\omega x)$
Ansatz:	$y_p = A \cdot \sin(\omega x) + B \cdot \cos(\omega x)$
Ausnahme:	Homogene Teillösungen $\sin(\omega x)$, $\cos(\omega x)$. Dann: $y_p = x \cdot (A \cdot \sin(\omega x) + B \cdot \cos(\omega x))$

Störfunktion:	$g(x) = e^{cx} \cdot \sin(\omega x)$ oder $g(x) = e^{cx} \cdot \cos(\omega x)$
Ansatz:	$y_p = e^{cx} \cdot (A \cdot \sin(\omega x) + B \cdot \cos(\omega x))$
Ausnahme:	Homogene Teillösungen $e^{cx} \cdot \sin(\omega x)$, $e^{cx} \cdot \cos(\omega x)$. Dann: $y_p = x \cdot e^{cx} \cdot (A \cdot \sin(\omega x) + B \cdot \cos(\omega x))$

Störfunktion:	$g(x) = e^{i\omega x}$
Ansatz:	$y_p = A \cdot e^{i(\omega x - \psi)}$
Ausnahme:	Homogene Teillösung $e^{i\omega x}$. Dann: $y_p = A \cdot x \cdot e^{i(\omega x - \psi)}$

Störfunktion:	$g(x) = e^{cx} \cdot e^{i\omega x}$
Ansatz:	$y_p = A \cdot e^{cx} \cdot e^{i(\omega x - \psi)}$
Ausnahme:	Homogene Teillösung $e^{cx} \cdot e^{i\omega x}$. Dann: $y_p = A \cdot x \cdot e^{cx} \cdot e^{i(\omega x - \psi)}$