Laplace-Transformation 1

Laplace-Integral, Korrespondenzen, grundlegende Eigenschaften

- Begriff der Transformation und Rücktransformation einer Funktion.
- Im folgenden sei f(t) = 0 für t < 0. Wir bezeichnen t = 0 als den Einschaltzeitpunkt.
- Definition (Laplace-Transformation)

Die **Laplace-Transformierte** F(s) zur Funktion f(t) ist

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt.$$

Schreibweise: $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}\ \text{oder}\ F(s) \bullet \frown f(t)$.

Paare von Funktionen f(t) und F(s) mit $f(t) \circ - \bullet F(s)$ heißen **Korrespondenzen**. Dabei wird f(t) als Zeitfunktion oder Originalfunktion bezeichnet; F(s) wird Bildfunktion genannt.

- Schematische Skizze.
- Anmerkung:
 - (a) Allgemein ist $s \in \mathbb{C}$. Wir haben im folgenden meistens $s \in \mathbb{R}$.
 - (b) Das Integral existiert nur unter bestimmten Bedingungen an die Funktion f (unter anderem: nicht "zu starkes Wachstum" für $t \to \infty$).
 - (c) **Rücktransformation**: Gegeben ist F(s). Gesucht ist f(t) so, daß $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$. Schreibweise: $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$. (Schematische Skizze!)
 - (d) Die Laplace-Transformation bildet f und F eineindeutig aufeinander ab.
- Beispiel: f(t) = t für $t \ge 0$.
- Beispiel: f(t) = k für $t \ge 0$ mit k konstant.
- Beispiel: $f(t) = e^{at}$ für $t \ge 0$ mit a konstant.

Copyright © 2007, Prof. Dr. H.-R. Metz. All rights reserved.

 $\bullet \ \operatorname{Satz} \ (\boldsymbol{\mathit{Linearit\"{a}tssatz}})$

Es gilt

- (a) $\mathcal{L}\{k \cdot f(t)\} = k \cdot \mathcal{L}\{f(t)\}, \text{ mit } k \text{ konstant};$
- (b) $\mathcal{L}{f(t) + g(t)} = \mathcal{L}{f(t)} + \mathcal{L}{g(t)}.$
- Beweis
- Beispiel
- Satz (*Differentiationssatz*)

Es gilt

- (a) $\mathcal{L}{f'(t)} = s \cdot \mathcal{L}{f(t)} f(0),$
- (b) $\mathcal{L}{f''(t)} = s^2 \cdot \mathcal{L}{f(t)} sf(0) f'(0),$
- (c) $\mathcal{L}{f^{(n)}(t)} = s^n \mathcal{L}{f(t)} s^{n-1} f(0) s^{n-2} f'(0) \dots f^{(n-1)}(0).$
- Beweis
- Beispiel
- Anmerkung: Für die praktischen Anwendungen der Laplace-Transformation sind der Linearitäts- und der Differentiationssatz die entscheidenden Grundlagen.

Ein linearer Ausdruck wird transformiert und im Bildraum bearbeitet, weil er dort eine einfachere Darstellung hat. Das Ergebnis wird in den Originalraum zurücktransformiert.