Reihen 4

Fourierreihen — Grundidee und trigonometrische Hilfsmittel

- Bei Taylorreihen werden vorgegebene Funktionen in einfachere Teilfunktionen 1, x, x^2, x^3, ... zerlegt.

  Man kann sich nun fragen, ob dies bei *periodischen* Funktionen — zum Beispiel der periodischen Rechteckfunktion oder dem periodischen Sägezahn — auch sinnvoll ist, oder ob man diese nicht besser in einfachere periodische Teilfunktionen zerlegt.

  Als „einfachere“ periodische Funktionen würden sich dabei Cosinus- und Sinusfunktionen verschiedener Frequenzen anbieten. Um beispielsweise eine 2π-periodische Funktion zu bekommen, kann man dann die Cosinus- und Sinusfunktionen

  $$\cos x, \quad \sin x, \quad \cos(2x), \quad \sin(2x), \quad \cos(3x), \quad \sin(3x), \quad \ldots$$

  verwenden.

  Experimentieren mit Plot-Software (oder Zeichnen per Hand) zeigt, daß durch Überlagerungen dieser Cosinus- und Sinusfunktionen neue periodische Funktionen entstehen, die auch speziell für die Praxis interessant sind.

- Problemstellung: Wir nehmen an, daß sich die 2π-periodische Funktion f darstellen läßt als Reihe

  $$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\Big) \\ &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos(2x) + b_2 \sin(2x) + \ldots \end{aligned}$$

  Jetzt stellen wir die Frage: Wie kann man bei einer solchen Darstellung die Koeffizienten a_n und b_n aus der Funktion f berechnen?

- Anmerkung:

  (a) Wir untersuchen nicht, welche Bedingungen eine periodische Funktion erfüllen muß, um als Reihe in der obigen Form darstellbar zu sein.

  (b) Wir führen keine Konvergenzuntersuchungen durch.

Copyright © 2007, Prof. Dr. H.-R. Metz. All rights reserved.

(c) Wir werden in der Berechnung der a_n und b_n annehmen, daß gliedweise integriert werden darf.

- Idee zur Berechnung der a_n und b_n.
- Anmerkung: Um die Idee zur Berechnung der Koeffizienten umsetzen zu können, brauchen wir einige Aussagen über Winkelfunktionen.
- Satz (Trigonometrische Hilfsmittel)

  Es gelten die folgenden Formeln.

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha+\beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) && (1)\\
\sin(\alpha+\beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta) && (2)\\
\cos(\alpha)\cos(\beta) &= \frac{1}{2}\Big(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\Big) && (3)\\
\sin(\alpha)\cos(\beta) &= \frac{1}{2}\Big(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\Big) && (4)\\
\cos(mx)\cos(nx) &= \frac{1}{2}\Big(\cos((m+n)x) + \cos((m-n)x)\Big) && (5)\\
\sin(mx)\cos(nx) &= \frac{1}{2}\Big(\sin((m+n)x) + \sin((m-n)x)\Big) && (6)
\end{aligned}$$

- Anmerkung: In (1) und (2) haben wir die Additionstheoreme der Winkelfunktionen. Aus ihnen leiten wir die restlichen Formeln her.
- Beweis
- Satz (Orthogonalitätseigenschaften von Sinus und Cosinus)

  (a) Für $m > 0$, $n > 0$ gilt:

$$\int_0^{2\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,dx = \begin{cases} \pi, & \text{falls } m = n,\\ 0, & \text{falls } m \neq n. \end{cases}$$

  (b) Für $m > 0$, $n > 0$ gilt:

$$\int_0^{2\pi} \sin(mx)\sin(nx)\,dx = \begin{cases} \pi, & \text{falls } m = n,\\ 0, & \text{falls } m \neq n. \end{cases}$$

  (c) Für $m > 0$, $n > 0$ gilt:

$$\int_0^{2\pi} \sin(mx)\cos(nx)\,dx = 0.$$

- Beweis zu (a) und (c). Der Beweis zu (b) verläuft analog.