Differentialgleichungen 8

Heun-Verfahren und Runge-Kutta-Verfahren zur numerischen Lösung von Differentialgleichungen

- Problemstellung: Zu der Anfangswertaufgabe (AWA) bestehend aus der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ und der Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ soll eine numerische Näherungslösung berechnet werden.

  Das Euler-Cauchy-Verfahren realisiert die Grundidee: Mit Hilfe von Steigungswerten — also mit Hilfe des Richtungsfeldes — wird ein Polygonzug als Näherung für die Lösungskurve gebildet.

  Die Verfahren von Heun und Runge-Kutta verfeinern diesen Ansatz.

- Das ***Heun-Verfahren***.

- Idee: Bei der Berechnung der einzelnen Strecken des Polygonzugs verwendet das Euler-Cauchy-Verfahren für ein Intervall $[x_i, x_{i+1}]$ nur Informationen vom linken Intervallrand: Anfangspunkt und Steigungswert an der Stelle x_i.

  Es ist aber anschaulich klar, daß die Lösungskurve auf $[x_i, x_{i+1}]$ nicht nur durch das Linienelement am linken Rand, sondern durch die Linienelemente des gesamten Intervalls beschrieben wird.

  Also nimmt das Heun-Verfahren die Steigung an x_i, führt einen Euler-Cauchy-Schritt durch, bekommt eine Strecke auf dem Intervall $[x_i, x_{i+1}]$ und damit einen neuen Steigungswert an x_{i+1}. Aus diesen beiden Steigungswerten wird dann der ***Mittelwert*** gebildet. Die Strecke des Euler-Cauchy-Schritts wird verworfen, und die neue und endgültige Strecke auf $[x_i, x_{i+1}]$ hat den Mittelwert als Steigung.

- Iterationsvorschrift

  Aus x_i und y_i soll die Näherung an der Stelle $x_{i+1} = x_i + h$ berechnet werden, wobei h die gewählte Schrittweite ist. Dazu bestimmt man zunächst

  $$p_i = f(x_i, y_i) \qquad \text{(Steigung in } x_i\text{)}$$

  und mit einem Euler-Cauchy-Schritt die vorläufige Näherung $y_i + hp_i$ an der Stelle $x_i + h$. In f eingesetzt ergibt sich

  $$q_i = f(x_i + h, y_i + hp_i) \qquad \text{(Steigung in } x_i + h\text{)}.$$

Copyright © 2007, Prof. Dr. H.-R. Metz. All rights reserved.

Die Heun-Formel

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot \frac{p_i + q_i}{2}$$

verwendet den Mittelwert $(p_i + q_i)/2$ der Steigungen und liefert damit die endgültige Näherung an der Stelle x_{i+1}.

- Skizze zur Herleitung der Iterationsvorschrift.
- Beispiel
- Das ***Runge-Kutta-Verfahren***. Genauer: Das klassische Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung.
- Idee: Der Grundgedanke des Heun-Verfahrens wird weiter verbessert, indem nicht nur Steigungswerte vom linken und rechten Intervallrand genommen werden, sondern auch zwei aus der Mitte des Intervalls. Damit wird ein gewichteter Mittelwert gebildet, bei dem die Steigungen in der Intervallmitte stärker berücksichtigt werden als die am Rand.
- Iterationsvorschrift

  Als Näherung für $y(x_1)$ wird

  $$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right)$$

  genommen, wobei

  $$\begin{aligned} k_1 &= h \cdot f(x_0, y_0) \\ k_2 &= h \cdot f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}\right) \\ k_3 &= h \cdot f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}\right) \\ k_4 &= h \cdot f(x_0 + h, y_0 + k_3) \end{aligned}$$

  ist. Dabei bedeutet h die Schrittweite.

  Entsprechend berechnet man Näherungen y_2, y_3 u.s.w.
- Skizze; Herleitung der Iterationsvorschrift.
- Fehlerabschätzung

  Als Fehlerabschätzung kann man

  $$\Delta y_i = |y(x_i) - y_i| \approx \frac{1}{15}\,|y_i - \tilde{y}_i|$$

  verwenden (ohne Herleitung), wobei $\tilde{y}_i$ die Näherung an x_i mit der doppelten Schrittweite wie bei y_i ist.
- Beispiel