

## Komplexe Zahlen 2

### Konjugiert komplexe Zahlen, Beträge, Polarkoordinaten

- Definition

Für  $z = x + iy$  heißt

$$\bar{z} = x - iy$$

die zu  $z$  **konjugiert komplexe** Zahl.

- Anmerkung: Statt  $\bar{z}$  schreibt man auch  $z^*$ .
- Skizze und Beispiele.
- Satz (Eigenschaften konjugiert komplexer Zahlen)

Für  $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  gilt:

(a)  $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2,$

(b)  $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2,$

(c)  $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \quad (z_2 \neq 0),$

(d)  $\overline{\bar{z}} = z,$

(e)  $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}).$

- Beweis
- Definition

Zu  $z = x + iy$  heißt die reelle Zahl

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

der **Betrag** von  $z$ .

- Skizze und Beispiele.

- Satz (Eigenschaften des Betrages)

Für  $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  gilt:

- (a)  $|z| \geq 0$ ,
- (b)  $|z| = 0$  genau dann, wenn  $z = 0$ ,
- (c)  $|z| = |\bar{z}|$ ,
- (d)  $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$ ,
- (e)  $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ .

- Anmerkung: Aus  $\sqrt{z \cdot \bar{z}} = |z|$  folgt durch Quadrieren  $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ , woraus sich unmittelbar  $z \cdot \bar{z} \in \mathbb{R}$  und  $z \cdot \bar{z} \geq 0$  ergibt.

Eine Anwendung haben wir bei der Division komplexer Zahlen. Ist der Nenner gleich  $z \neq 0$ , wird mit der konjugiert komplexen Zahl  $\bar{z}$  erweitert, und der neue Nenner  $z \cdot \bar{z}$  ist reell. Wegen  $z \neq 0$  ist er außerdem echt größer Null.

- Beweis
- Polarkoordinaten  $r, \varphi$  für eine Zahl  $z \in \mathbb{C}, z \neq 0$ .
- Definition

Zur komplexen Zahl  $z \neq 0$  heißt

$$z = r(\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))$$

die *trigonometrische Darstellung* von  $z$ . Der Winkel  $\varphi$  heißt *Argument* von  $z$ ,

$$\varphi = \arg(z).$$

- Beispiele
- Umrechnungen zwischen cartesischen und polaren Koordinaten.