

Partielle Ableitungen und Fehlerrechnung

Absolute und relative Fehler, lineares Fehlerfortpflanzungsgesetz

- Beispiel
- Definition

Zu den **wahren Werten** x_w, y_w, \dots werden **Näherungswerte** $\tilde{x}, \tilde{y}, \dots$ bestimmt, zum Beispiel Meßwerte oder Mittelwerte \bar{x}, \bar{y}, \dots aus Einzelmessungen.

Als **absoluten Fehler** von \tilde{x} bezeichnen wir

$$|x_w - \tilde{x}|$$

und als **relativen Fehler** von \tilde{x}

$$\left| \frac{x_w - \tilde{x}}{x_w} \right|.$$

Der relative Fehler ausgedrückt in Prozenten wird **prozentualer Fehler** genannt.

- Anmerkung:
 1. Da der wahre Wert normalerweise unbekannt ist, wird der absolute Fehler üblicherweise abgeschätzt,

$$|x_w - \tilde{x}| \approx \Delta x$$

und die Abschätzung zusammen mit dem Näherungswert z.B. durch $x = \tilde{x} \pm \Delta x$ angegeben. (Diese Schreibweise wird aber auch verwendet, wenn Δx aufgrund eines anderen Fehlerkonzepts zustande kommt.)

2. Der relative Fehler wird durch

$$\left| \frac{x_w - \tilde{x}}{x_w} \right| \approx \left| \frac{x_w - \tilde{x}}{\tilde{x}} \right| \approx \left| \frac{\Delta x}{\tilde{x}} \right|$$

abgeschätzt, z.B. durch $|\Delta x / \tilde{x}|$.

3. Der prozentuale Fehler ist

$$100 \cdot (\text{relativer Fehler})\%,$$

$$\text{z.B. } 100 \cdot |\Delta x / \tilde{x}| \%.$$

- Problemstellung:

Eine Größe y hängt von den Veränderlichen x_1, x_2, \dots, x_n ab:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Hätte man die wahren Werte von x_1, \dots, x_n zur Verfügung, könnte man diese in die Formel f einsetzen und den wahren Wert y_w von y berechnen. Weil man die wahren Werte aber nicht kennt, setzt man die Näherungswerte $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n$ ein, und erhält für y die Näherung

$$\tilde{y} = f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n).$$

Jetzt ist eine **Abschätzung des absoluten Fehlers** $|y_w - \tilde{y}|$ gesucht.

Das Problem bei dieser Abschätzung ist, aus den Fehlern von $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n$ mit Hilfe der Formel f auf den Fehler von \tilde{y} zu schließen.

- Lösungsidee:

Näherungsweise Fehlerabschätzung durch Linearisierung von f mit dem totalen Differential.

- Skizze

- **Lineares Fehlerfortpflanzungsgesetz**

Sind die Δx_i für $i = 1, \dots, n$ Abschätzungen der absoluten Fehler von \tilde{x}_i , so kann der absolute Fehler $|y_w - \tilde{y}|$ von \tilde{y} abgeschätzt werden durch

$$\Delta y_{max} = |f_{x_1} \cdot \Delta x_1| + |f_{x_2} \cdot \Delta x_2| + \dots + |f_{x_n} \cdot \Delta x_n|,$$

wobei in die Funktionen f_{x_1}, \dots, f_{x_n} die Näherungswerte \tilde{x}_i von x_i eingesetzt werden.

- Anmerkung: Der Wert Δy_{max} heißt **maximaler absoluter Fehler** von \tilde{y} .
- Anmerkung: Mit Δy_{max} bekommt man den **relativen Maximalfehler**

$$\left| \frac{\Delta y_{max}}{\tilde{y}} \right| = \left| \frac{\Delta y_{max}}{f(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)} \right|$$

und den **prozentualen Maximalfehler**

$$100 \cdot \left| \frac{\Delta y_{max}}{\tilde{y}} \right| \%.$$

- Beispiel

- Spezialfall $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a x_1^{c_1} x_2^{c_2} \dots x_n^{c_n}$

Die Maximalfehler von $y = a x_1^{c_1} x_2^{c_2} \dots x_n^{c_n}$ setzen sich linear aus den relativen Fehlern

$$\left| \frac{\Delta x_i}{\tilde{x}_i} \right|$$

der \tilde{x}_i zusammen.

Absoluter Maximalfehler:

$$\Delta y_{max} = |f(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)| \cdot \left(|c_1| \cdot \left| \frac{\Delta x_1}{\tilde{x}_1} \right| + |c_2| \cdot \left| \frac{\Delta x_2}{\tilde{x}_2} \right| + \dots + |c_n| \cdot \left| \frac{\Delta x_n}{\tilde{x}_n} \right| \right).$$

Relativer Maximalfehler:

$$\left| \frac{\Delta y_{max}}{\tilde{y}} \right| = |c_1| \cdot \left| \frac{\Delta x_1}{\tilde{x}_1} \right| + |c_2| \cdot \left| \frac{\Delta x_2}{\tilde{x}_2} \right| + \dots + |c_n| \cdot \left| \frac{\Delta x_n}{\tilde{x}_n} \right|.$$

- Anmerkung: Der relative Fehler von $\tilde{y} = (\tilde{x})^n$ ist also das n -fache des relativen Fehlers von \tilde{x} .

Ferner ist der relative Fehler von $\tilde{y} = \sqrt[n]{\tilde{x}}$ der n -te Teil des relativen Fehlers von \tilde{x} .

- Beispiele