Differentialrechnung

Aufgabe 1.
Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^n-a^n}{x-a}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}$ d) $\lim\limits_{x\to 0}(x^2\cdot\ln x)$

Aufgabe 2.
Berechnen Sie den Grenzwert: $\lim_{x\to\infty} x^n\cdot e^{-x}$.

Aufgabe 3.
Die Energieverteilung $E(\lambda)$ im Spektrum des schwarzen Körpers als Funktion der Wellenlänge λ berechnet sich nach dem Planckschen Strahlungsgesetz als

$$E(\lambda)=\frac{c^2h}{\lambda^5(e^{ch/(kT\lambda)}-1)}$$

(c: Lichtgeschwindigkeit, h: Plancksches Wirkungsquantum, k: Boltzmann-Konstante, T: absolute Temperatur).

Experimentell beobachtet man $E(\lambda)\to 0(\lambda\to 0)$. Zeigen Sie, daß dies auch aus der Formel folgt.

(Hinweis: Schreiben Sie zur Abkürzung $u=ch/(kT\lambda)$, und verwenden Sie u statt λ als Variable.)

Aufgabe 4.
Auf dem Intervall $[0,3]$ soll mit dem Newton-Verfahren nach einer Nullstelle der Funktion $f(x)=2x^3-3x^2+2x-6$ gesucht werden.

Verschaffen Sie sich zunächst einen Eindruck vom Verlauf der Funktionskurve, indem Sie an den Stellen 0, 1, 2 und 3, sowie an $3/2$ und $5/2$ die Funktionswerte berechnen und eine Skizze zeichnen. (Bei der Skizze genügt der Bereich von 0 bis $2,5$; wesentlich ist der Durchgang durch die x-Achse.)

Stellen Sie dann die Iterationsvorschrift für die gegebene Funktion auf, und berechnen Sie einen Iterationsschritt ausgehend vom Startwert $x_0=2$.

Aufgabe 5.
Bestimmen Sie numerisch Nullstelle und Maximum der Funktion

$$u(t)=\cos t-\frac{\exp(-2t)}{2}$$

im Intervall $[0,\pi/2]$. Wie groß ist die Funktion im Maximum und am Rand des Intervalls?

Aufgabe 6.
Ein Parabelbogen sei durch die Gleichung $y = 1 - x^2/4$ (mit $y \geq 0$) beschrieben. Zwischen den Parabelbogen und die x-Achse soll ein möglichst großes Rechteck eingepaßt werden. Wie groß ist es?

Aufgabe 7.
Ein Haus mit quadratischem Grundriß werde vereinfacht durch einen Kasten mit der Seitenlänge a und der Höhe h dargestellt. Der umbaute Raum V ist vorgegeben. Der Boden sei ideal wärmeisoliert. Durch das Dach ströme pro m^2 dreimal soviel Wärme ab wie durch die Mauern. Welche Form muß das Haus haben, damit der Wärmeverlust möglichst gering ist? (Hinweis: Wärmeverlust = $K \cdot$ Fläche)

Aufgabe 8.
Ein schwingungsfähiges mechanisches System mit der Masse m und der Eigenkreisfrequenz ω_0 wird durch eine periodische von der Zeit t abhängige äußere Kraft $F(t) = F_0 \cdot \sin(\omega t)$, $t \geq 0$, zu erzwungenen Schwingungen angeregt. Das System schwingt dann nach einer Einschwingphase mit der aufgezwungenen Erregerkreisfrequenz ω, wobei die Schwingungsamplitude A noch wie folgt von ω abhängt:

$$A = A(\omega) = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}\,, \qquad \omega > 0$$

(δ: Dämpfungsfaktor). Bei welcher Kreisfrequenz ω_R schwingt das System mit größtmöglicher Amplitude (Resonanzfall)?

Aufgabe 9.
Die Unterkante eines 80 cm hohen Bildes ist 2 m vom Erdboden entfernt. In welcher waagrechten Entfernung vom Bild muß sich eine Beobachterin (Augenhöhe 160 cm) aufstellen, damit sie das Bild möglichst gut sieht? (Dabei soll „möglichst gut sehen“ mit Hilfe des Sehwinkels definiert werden.)

Aufgabe 10.
Führen Sie eine Kurvendiskussion für

$$x(t) = e^{2t}\cos(2t)$$

im Intervall $[-1, 1]$ durch (Nullstellen, Extremwerte, Wendepunkte, Werte am Rand des Intervalls, Skizze der Kurve).

Aufgabe 11.
Zu untersuchen ist die Kurve mit $y = \cos(x/5) \cdot \ln x$ im Intervall $(0, 15]$. (Nullstellen, Extremwert, Wendepunkt, Skizze.)

Die entstehenden Gleichungen sind ggf. näherungsweise zu lösen (Programm, Ergebnisse auf 2 Stellen hinter dem Komma genau.)